## 1.3. Otimização de uma função objetivo, transformando as restantes em restrições

**Prop:** Consideremos

$$
\text{(P.O.V.)} \quad
\begin{array}{l}
\max\ z_1 = c_{1.}\,.\,x \\
\max\ z_2 = c_{2.}\,.\,x \\
\ldots \\
\max\ z_r = c_{r.}\,.\,x \\
\\
s.a:\quad x \in S
\end{array}
$$

**Se**, para algum $k$ (entre *1* e $r$), $x^*$ for solução ótima única do problema

$$
(P_k) \quad
\begin{array}{ll}
\max\ z_k(x) = c_{k.}\,.\,x & \\
\quad s.a: & x \in S \\
 & z_i(x) \geq w_i, \quad i = 1,\ldots,r, \quad i \neq k
\end{array}
$$

em que $w_i \quad (i = 1,\ldots,r, \quad i \neq k)$ são valores reais escolhidos de forma arbitrária, mas que não tornam vazia a região admissível de $(P_k)$ ,

**então** $x^*$ é solução eficiente do problema de otimização vetorial.

**Obs:** Naturalmente, podem existir soluções eficientes, entre as soluções que não forem únicas.
Mas, se $x^*$ não for única só se pode garantir que é fracamente eficiente.

## 1.4. Otimização de uma soma ponderada das funções objetivo

**Prop:** Se $x^*$ for solução ótima do problema

$$(P^{SP}) \quad \begin{array}{l} \max\ z = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k z_k(x) \\ s.a: \quad x \in S \end{array}, \qquad com \quad \lambda_k > 0, \quad \forall k = 1,\dots,r \quad e \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1,$$

então $x^*$ é solução eficiente do problema de otimização vetorial.

**Obs1:** O resultado ainda é válido se se exigir apenas uma soma ponderada positiva e com apenas um dos coeficientes igual a 1 (em vez de soma dos coeficientes igual a 1).

**Obs2:** Se não se exigisse $\lambda_k > 0$ mas apenas $\lambda_k \geq 0$, poder-se-iam obter soluções fracamente eficientes.

**Obs3:** Naturalmente, diferentes vetores $\lambda$ poderão originar a mesma solução eficiente.
***Região de indiferença*** para $x$ é o conjunto de valores de $\lambda$ que originam o mesmo ponto extremo eficiente $x$.
***Decompor o espaço dos pesos*** é determinar as diferentes regiões de indiferença.

## 3.5. Minimização da distância de Tchebycheff a um ponto de referência

Vejamos agora **como obter soluções não dominadas**,
minimizando a distância da Reg. Adm. no espaço dos objetivos a um ponto de referência, segundo uma métrica especial (métrica de Tchebycheff , pesada e aumentada).

Em geral, o ponto de referência escolhido é o ponto ideal.

Uma ***métrica*** é uma função que mede a distância entre dois pontos de $R^n$, *z'* e *z''*.

Costuma designar-se por

$$\|z'-z''\|.$$

Pode tomar várias formas, desde que verifique os seguintes axiomas

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & \|z'-z''\| \geq 0 \\ (ii) & \|z'-z''\| = \|z''-z'\| \\ (iii) & \|z'-z''\| \leq \|z'-z'''\| + \|z'''-z''\| \\ (iv) & \|z'-z''\| = 0 \quad sse \quad z' = z'' \end{array}\right. , \quad \forall z', z'', z''' \in R^n$$

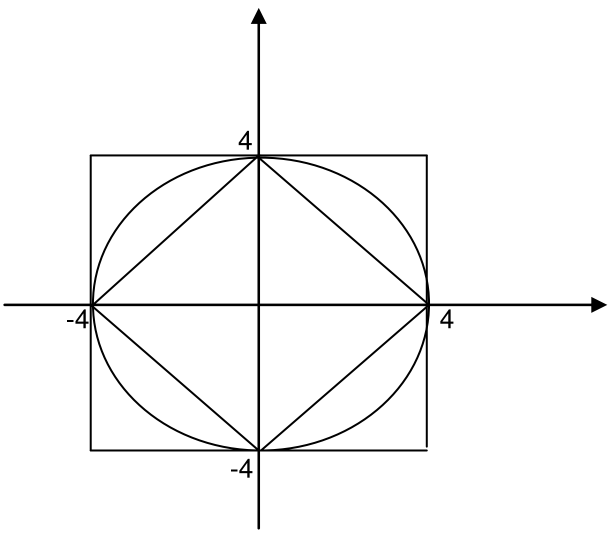
Uma família de métricas frequentemente utilizada é a família $L_p$:

$$\| z' - z'' \|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} | z'_k - z''_k |^p}, \quad \textit{em que } p \in N \textit{ ou } p = +\infty.$$

**Obs:** $\| z' - z'' \|_1 = \sum_{k=1}^{n} | z'_k - z''_k |$ (distância *Manhatan*)

$$\| z' - z'' \|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} | z'_k - z''_k |^2} \quad \text{(distância } \textit{Euclideana}\text{)}$$

$$\| z' - z'' \|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} | z'_k - z''_k | \quad \text{(distância } \textit{Tchebycheff}\text{)}$$

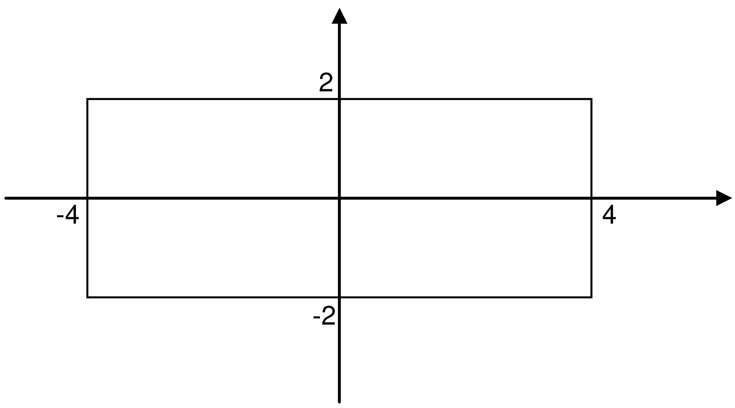


Existe uma família de métricas um pouco mais gerais do que as métricas $L_p$, que é a ***família de métricas $L_p$ ponderadas***, $L_p^\lambda$ **:**

$$\| z' - z'' \|_p^\lambda = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, | z'_k - z''_k |^p}, \quad \textit{em que } p \in N \textit{ ou } p = +\infty,$$

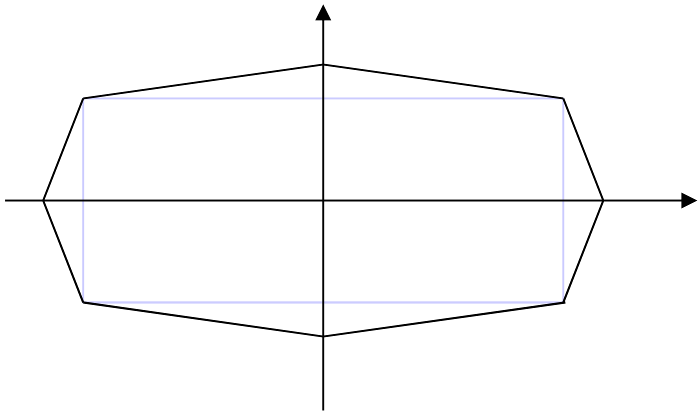
$$\lambda_k \geq 0, \ \forall k = 1, \ldots, n.$$

Obs: $L_\infty^\lambda$ - ***métrica de Tchebycheff pesada***

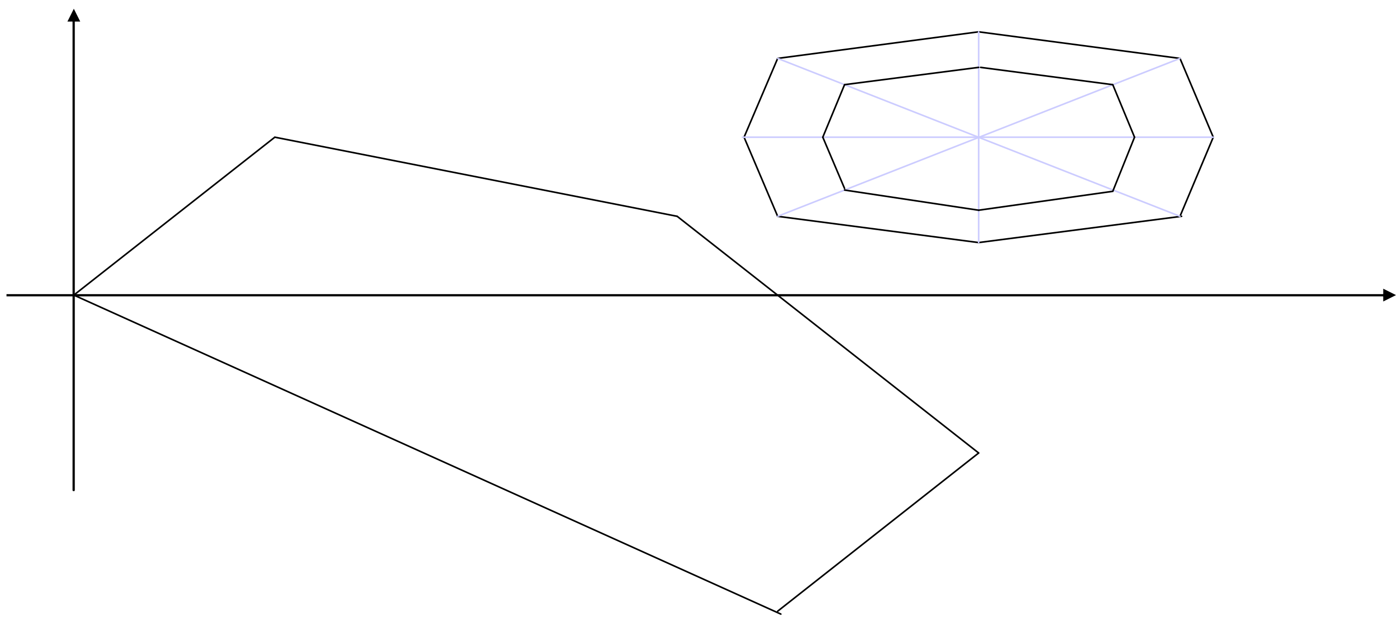


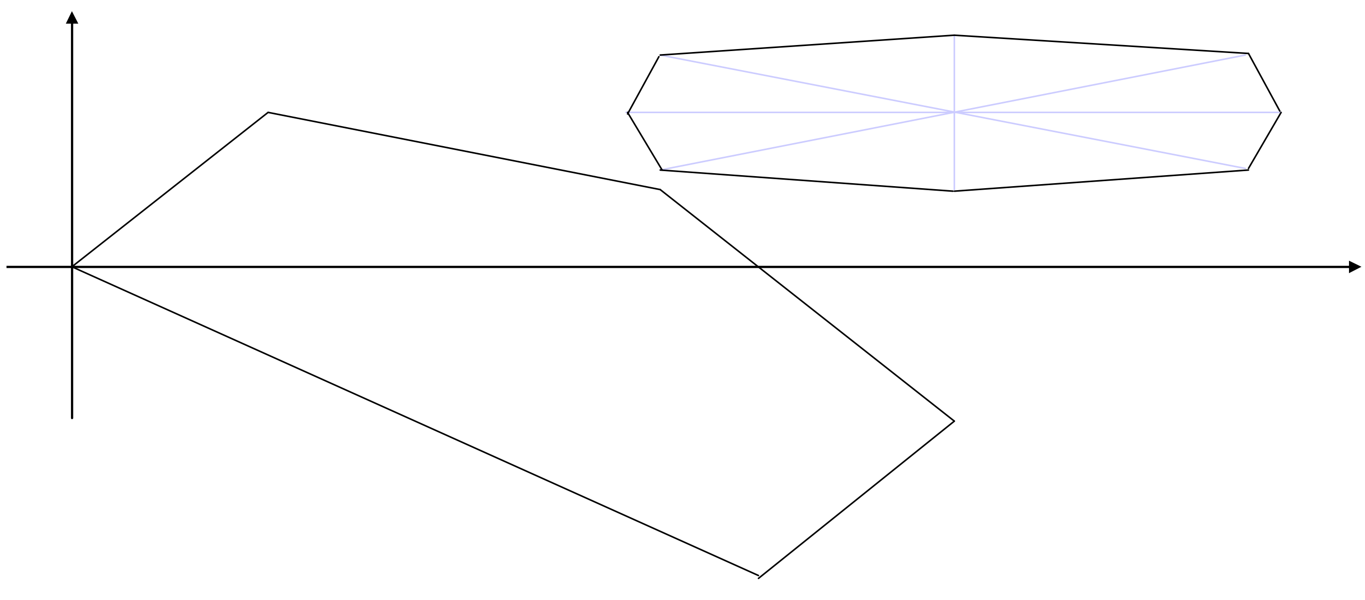
E finalmente, a **métrica de Tchebycheff pesada e aumentada**, $L_\infty^{\lambda\varepsilon}$ é definida por

$$\| z' - z'' \|_\infty^{\lambda\varepsilon} = \| z' - z'' \|_\infty^{\lambda} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \mid z'_k - z''_k \mid, \quad \varepsilon_k > 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$



**Prop:** Se se minimizar uma distância de Tchebycheff pesada e aumentada entre a região admissível no espaço dos objetivos e o ponto ideal, obtem-se uma solução não dominada.





**Prop:** Consideremos o P.O.V.

$$\max \ z = C\boldsymbol{x}$$

$$s.a \quad \boldsymbol{x} \in S$$

e seja $\boldsymbol{z}^*$ o ponto ideal deste problema.

Se $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ for solução ótima do problema

$$(T) \qquad \begin{array}{l} \min \ t = v - \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \,.\, z_k(\boldsymbol{x}) \\ s.a \quad \begin{cases} \lambda_k\big(z^*{}_k - z_k(\boldsymbol{x})\big) \leq v, & k = 1, \dots, r \\ \boldsymbol{x} \in S \end{cases} \end{array}$$

com $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ constantes positivas, então

$\widetilde{\boldsymbol{x}}$ é uma solução eficiente do POV.

**Obs**: O problema (T) equivale a minimizar uma distância de Tchebycheff, pesada e aumentada, entre o ponto ideal e a região admissível (no espaço dos objetivos).

## 2. Métodos interativos

Em PL multiobjetivo, não basta gerar soluções eficientes

- esforço computacional enorme

- proposta ao decisor de ‘demasiadas’ soluções eficientes
  (centenas ou milhares de sol.s,
  ainda q se restrinja apenas aos pontos extremos eficientes)

$$\Downarrow$$

Métodos Interativos (STEM, Zionts e Wallenious,...)

Método de STEM

- a RA vai sendo reduzida, progressivamente
- em cada iteração,
  o decisor especifica uma quantidade que esteja disposto a sacrificar,
  numa f.o. cujo valor considere mais satisfatório,
  de modo a conseguir
  melhorar os valores de f.o. que ainda não o satisfaçam

(minimizando a distancia de Tchebycheff ao ponto ideal,
com ponderadores baseados na tabela de payoff)

Método de Zionts e Wallenious

- minimização da soma ponderada das funções objetivo,
  reduzindo progressivamente o espaço dos pesos