Programação Não Linear

No Capítulo 1 vimos

Hipóteses fundamentais de PL:

H1) Proporcionalidade: a contribuição de cada atividade para o valor da função objetivo, bem como para o primeiro membro das restrições, é **proporcional** ao nível da atividade

(a contribuição de cada variável para o valor da função objetivo, bem como para o primeiro membro das restrições, é proporcional ao valor da variável)

H2) Aditividade: a contribuição de cada atividade para o valor da função objetivo, bem como para o primeiro membro das restrições, é **independente** da contribuição das restantes

H3) Divisibilidade: cada variável pode tomar qualquer valor

H4) Certeza: todos os valores dos parâmetros são conhecidos

Em PL todas as funções envolvidas são lineares.

Muitos problemas práticos correspondem a esse modelo, mas outros não.

Em Economia, a não linearidade é a regra e não a exceção (por exemplo, Baumeol, W.J., Bushnell, R.C., 'Error produced by linearization in Mathematical Programming, v35, p 447-471, 1967, 'Econometrica')

Problema PNL

$$\begin{array}{ll} max & z = f(\boldsymbol{x}) \\ s.a & \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}) \leq b_i, & i = 1, \dots, m \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{cases} \end{array}$$

Obs: diferentes características de f e g_i

=>

diferentes tipos de problemas de PNL

=>

diferentes algoritmos de resolução

Obs: Para alguns destes problemas, mesmo a resolução de pequenos problemas é muito difícil

Tipos de Problemas de PNL

- Otimização sem restrições

- Optimização com restrições lineares
  - Programação Quadrática
    (f.o. quadrática, restrições lineares;
    Bons algoritmos se max *f* concava ou min f convexa)
  - ...

- Programação Convexa
  (max f(x) concava e todas gi(x) convexas)

- Programação Separável
  (todas as fçs são separáveis,
  f(x)=f1(x1)+f2(x2)+...+fm(xm)
  gi(x)=gi1(x1)+gi2(x2)+...+gim(xm))

(...)

Exemplo protótipo: variante

$$Max \quad z = 10x_1 - x_1^2 + 12x_2 - x_2^2$$

$$s.a \quad \begin{cases} x_1 & \leq 4 \\ \quad\quad 2x_2 & \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução gráfica

Problema de Programação Quadrática

em que se pretende maximizar uma função côncava

Exemplo de Aplicação da PNL à Seleção de Investimentos (§8.2, HHSS 2008)

Os gestores profissionais de grandes carteiras de títulos sabem que os investidores estão preocupados com o **ganho esperado** e com o **risco associado** aos seus investimentos.

É prática comum decidir

min z= **risco** do investimento
s.a **ganho** esperado **>=** nível **mínimo** aceitável

O risco dum título costuma medir-se pela sua variação (variância) e o risco de adquirir 2 títulos costuma medir-se pela variação conjunta (covariancia).

Vejamos um exemplo numérico com apenas 3 títulos e onde se considera que o ganho mínimo aceitável é de 18% do investimento total.

Sejam

S_j = % do investimento dedicada ao título j, j=1,2,3

e considerem-se os seguintes dados:

Título	Ganho esperado	Risco (desvio padrão)
1	21%	25%
2	30%	45%
3	8%	5%

Par de Títulos	Risco conjunto (covariância)
1 e 2	0,04
1 e 3	-0,005
2 e 3	-0,01

Então,

$$\min \quad z = (0{,}25S_1)^2 + (0{,}45S_2)^2 + (0{,}05S_3)^2 + 2(0{,}04)S_1S_2 + 2(-0{,}005)S_1S_3 + 2(-0{,}01)S_2S_3$$

$$s.a \quad \begin{cases} 21S_1 + 30S_2 + 8S_3 \geq 18 \\ S_1 + S_2 + S_3 = 1, \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0. \end{cases}$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (otimização com restrições)

Sejam f e g_i diferenciáveis e satisfazendo certas condições de regularidade.

Considere-se

$$\text{(PNL)} \quad \begin{array}{ll} max & z = f(\boldsymbol{x}) \\ s.a & \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}) \leq b_i, \ i = 1, \dots, m \\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array}$$

Teor: Se $\boldsymbol{x}^*$ é s.o. do (PNL) então existem escalares $u_1, u_2, \dots, u_m$ tais que

$$(KKT) \begin{cases} \dfrac{df}{dx_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} u_i \frac{dg_i}{dx_j} \leq 0, & j = 1, \dots, n \\ {x^*}_j \left(\dfrac{df}{dx_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} u_i \frac{dg_i}{dx_j} \right) = 0, j = 1, \dots, n & \\ g_i(x*) - b_i \leq 0, & i = 1, \dots, m \\ u_i(g_i(x*) - b_i) = 0, & i = 1, \dots, m \\ {x^*}_j \geq 0, \quad u_i \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n & \end{cases}$$

Teor: Se f for uma função concava e g_i funções convexas, $i = 1, \dots, m$, (isto é, PPC), então

$\boldsymbol{x}$ é s.o. do (PNL) se e só se existe $\boldsymbol{u}$ tal que $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})$ verificam KKT.