Notas breves

Extraído do texto de apoio à disciplina de Matemática II em 2009/2010, da autoria de Maria do Rosário Grossinho

Extracto do capítulo: Problemas de Extremo. Optimização

Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^m$ diz-se **convexo** se

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, \forall \alpha \in [0,1], \quad \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \in A.$$

Geometricamente, isto significa que, dado qualquer par de pontos de A, o segmento que os une está contido em A.

Obs Facilmente se verifica que a região admissível dum problema de Programação Linear é um conjunto convexo.

Definição 1 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^m$ um conjunto convexo. Uma função*

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

diz-se ***convexa*** *em A se*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, \forall \alpha \in [0,1], \quad f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \leq \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{y})$$

Analogamente, uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diz-se ***côncava*** *em A se*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, \forall \alpha \in [0,1], \quad f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \geq \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{y})$$

No caso $n = 2$, visualiza-se geometricamente que, se uma função $z = f(x, y)$ for **côncava (convexa)**, então, para todo o par de pontos M e N do gráfico, o segmento que os une nunca se encontra acima (abaixo) do gráfico.

Teorema 2 *Seja f uma função de classe $\mathcal{C}^2$ definida num aberto A convexo em $\mathbb{R}^m$. Então*

$$\begin{aligned} &f \text{ é convexa em } A \quad \Leftrightarrow \quad \text{hessiana DP ou SDP em } A, \\ &f \text{ é côncava em } A \quad \Leftrightarrow \quad \text{hessiana DN ou SDN em } A. \end{aligned}$$

Extracto do capítulo: Complementos de Álgebra Linear

Proposição 3 *Seja A uma matriz simétrica. Então, usando as abreviaturas introduzidas na definição anterior relativamente à classificação de matrizes simétricas, tem-se*

$$\begin{array}{lcl} A \text{ é } DP & \Leftrightarrow & \text{todos os valores próprios } \lambda_i > 0; \\ A \text{ é } SDP & \Leftrightarrow & \text{um valor próprio } \lambda_i = 0 \text{ e os outros } \geq 0; \\ A \text{ é } DN & \Leftrightarrow & \text{todos os valores próprios } \lambda_i < 0; \\ A \text{ é } SDN & \Leftrightarrow & \text{um valor próprio } \lambda_i = 0 \text{ e os outros } \leq 0; \\ A \text{ é } IND & \Leftrightarrow & \text{um valor próprio } < 0 \text{ e outro } > 0. \end{array}$$

Definição 4 *Uma **submatriz principal** B de A é uma submatriz obtida suprimindo certas linhas de A bem como as colunas com o mesmo índice.*
*Uma **submatriz principal primária** B de A é uma submatriz principal obtida suprimindo as r últimas linhas e as r últimas colunas de A, para um inteiro r compreendido entre 0 e $n-1$.*

Proposição 5 *Se uma submatriz principal B de uma matriz simétrica A possuir pelo menos k valores próprios ≥ 0 (respectivamente > 0, < 0, ≤ 0), então passa-se o mesmo para A.*

Definição 6 *Chamamos **menores principais primários** aos determinantes das matrizes principais primárias.*

Teorema 7 *Seja A uma matriz simétrica de ordem n. Então*
1. *A é DP se e só se todos os menores principais primários são > 0;*
2. *A é DN se e só se os menores principais primários de ordem ímpar são < 0 e os de ordem par são > 0;*
3. *Se $|A| \neq 0$ e os menores principais não satisfizerem as condições de sinal referidas em 1. ou em 2., então A é indefinida.*

Obs 8 *O teorema anterior não permite classificar uma matriz A quando $|A| = 0$, podendo acontecer que A seja SDP, SDN ou IND. Assim, se $|A| = 0$, a classificação de A deverá ser feita por definição ou através do cálculo dos valores próprios.*