Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
ANÁLISE MATEMÁTICA 2

Época de Recurso 24/01/2012

Parte I

1. Determine, em função do parâmetro $\alpha > 0$, a natureza da série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\log n + n^\alpha},$$

esclarecendo quando é divergente, absolutamente convergente ou simplesmente convergente.

2. Desenvolva a função $f(x) = \ln(\sqrt[4]{1+x^4})$ em série de potências de x, indicando o maior intervalo aberto onde tal desenvolvimento é válido.

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \log(xy) \cdot \sqrt{-y^2 + \sin^2 x}.$$

Determine geométrica e analiticamente o domínio de f, bem como o seu interior e fronteira. Dê exemplos de: i) Uma sucessão de termos na fronteira de D_f, convergente para um ponto de $\overline{D_f}$; ii) Uma sucessão de termos em D_f que não seja limitada.

4. Considere a afirmação: "Não podem existir dois conjuntos fechados e disjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ tais que, para todo o $\varepsilon > 0$, existam $x \in A$ e $y \in B$ tais que $d(x,y) < \varepsilon$". Demonstre a afirmação ou forneça um contra-exemplo.

5. Estude quanto à continuidade a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{cases} x^2+y^2, & x^2+y^2 < 2y \\ |x|, & x^2+y^2 = 2y \\ y^2, & x^2+y^2 > 2y \end{cases}.$$

Parte II

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & , x+y>0 \\ \\ x+y & , x+y \leq 0 \end{cases}$$

a) Mostre que f admite derivadas parciais na origem e calcule o seu valor.

b) Discuta a diferenciabilidade de f na origem.

2. Considere uma função harmónica $u(x,y)$, de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Mostre que a função $U(\rho,\theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ é solução da equação

$$\rho^2 \, \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0.$$

3. Determine os extremantes locais de $f(x,y) = x^{10} + y^{10} - 5x^2 - 5y^2$ e discuta a possibilidade de existência de maximizantes globais.

4. Considere a região do plano complexo definida por $\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}\,\omega \leq \ln 2\}$, assim como a sua imagem, Ω^*, através da função exponencial. Represente graficamente a região Ω^* e discuta a injectividade desta transformação de Ω em Ω^*.

5. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $e^{iz} + e^z = 0$.

6. Determine o subconjunto de $\mathbb{C}$ onde a função $f(z) = |z|^2 - \dfrac{\overline{z}^2}{2}$ é holomorfa e calcule $f'(z)$ nesses pontos.