FORMULÁRIO

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS E APLICAÇÕES

MAEG-ISEG 2008

1 Desenvolvimentos em série

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

$$\log(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j} \qquad \text{for } -1 < x \leq 1$$

$$(1+x)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j \qquad \text{for } -1 < x < 1$$

2 Cadeias de Markov

- *Equações de Chapman-Kolmogorov em forma matricial*:

$$\mathbf{P}^{(m+n)} = \mathbf{P}^{(m)}\mathbf{P}^{(n)} \quad \text{e portanto} \quad \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$$

- *Análise baseada no primeiro passo*:

  Considere-se uma cadeia de Markov $\{X_n\}$ finita com estados $n = 0, 1, \ldots, N$, numerados de tal modo que os primeiros r estados sejam transientes, sendo os restantes $r, \ldots, N$ estados absorventes. Seja U_{ik} a probabilidade de absorção no estado k quando o processo se inicia no estado i ($r \leq k \leq N;\ 0 \leq i < r$).

$$U_{ik} = P_{ik} + \sum_{j=0}^{r-1} P_{ij} U_{jk}, \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots, r-1.$$

  Suponha-se que a cada estado transiente está associada uma taxa $g(i)$, $i = 0, \ldots, r-1$. Seja w_i a taxa média até à absorção quando o processo se inicia no estado i,

$$w_i = g(i) + \sum_{j=0}^{r-1} P_{ij} w_j, \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots r-1.$$

- Seja P uma matriz de probabilidades de transição regular com espaço dos estados $0, 1, \ldots, N$. A *distribuição limite* $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_N)$ é a única solução não negativa do sistema de equações

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P$$
$$\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1.$$

3 Processos de Poisson

- Num processo de Poisson não homogéneo, a distribuição do número de acontecimentos ocorridos entre s e $s+t$ tem distribuição de Poisson com média dada por $\int_s^{s+t} \lambda(u)du$, onde $\lambda(u)$ designa a função de intensidade do processo.
- Seja $\{N(t); t \geq 0\}$ um processo de Poisson homogéneo. Se,

$$X(t) = \sum_{j=0}^{N(t)} Y_j$$

com $Y_0 \equiv 0$ e $\{Y_j\}_{j=1,2,\ldots,N(t)}$ uma sucessão de v.a. i.i.d. e independentes de $N(t)$ diz-se que $\{X(t); t \geq 0\}$ é um Processo de Poisson Composto.

A função característica de $X(t)$ é

$$\varphi_{X(t)}(s) = \exp\{\lambda t[\varphi_Y(s) - 1]\}$$

onde $\varphi_Y(s)$ é a função característica comum das v.a. Y_j e λ é a intensidade do processo de Poisson.

Tem-se que

$$E[X(t)] = \lambda t E[Y],$$
$$Var[X(t)] = \lambda t E[Y^2],$$
$$\mu_3[X(t)] = \lambda t E[Y^3].$$

4 Processo de nascimento

- Equações diferenciais, quando $N(0) = 0$:

$$P_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}$$
$$P_n(t) = \lambda_{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda_n t} \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_n x} P_{n-1}(x)dx \quad n = 1, 2, \ldots$$

- Quando os parâmetros $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ são todos diferentes as equações anteriores podem ser resolvidas explicitamente, obtendo-se

$$P_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_0 t},$$

$$P_1(t) = \lambda_0 \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0}\mathrm{e}^{-\lambda_0 t} + \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_1}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \right),$$

$$P_n(t) = \lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}[B_{0,n}\mathrm{e}^{-\lambda_0 t} + \ldots B_{n,n}\mathrm{e}^{-\lambda_n t}], \text{ para } n > 1,$$

onde

$$B_{0,n} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_0)\ldots(\lambda_n - \lambda_0)},$$

$$B_{k,n} = \frac{1}{(\lambda_0 - \lambda_k)\ldots(\lambda_{k-1} - \lambda_k)(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\ldots(\lambda_n - \lambda_k)}, \text{ para } k < n,$$

e

$$B_{n,n} = \frac{1}{(\lambda_0 - \lambda_n)\ldots(\lambda_{n-1} - \lambda_n)}.$$

- Quando num processo de nascimento $\lambda_k = \alpha + k\beta$, para $k = 0, 1, \ldots$, obtem-se o *processo de Yule com imigração.* Neste caso as equações anteriores podem ser simplificadas, obtendo-se

$$P_n(t) = \binom{n + \alpha/\beta - 1}{n} \mathrm{e}^{-\alpha t} \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}\right)^n \quad n = 0, 1, \ldots.$$

que corresponde à binomial negativa com parâmetros α/β e $\exp(-\beta t)$.

- Quando supomos que $N(0) = n_0$ as equações diferenciais são

$$\begin{aligned} P'_{n_0}(t) &= -\lambda_{n_0} P_{n_0}(t) \\ P'_n(t) &= -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) \quad n > n_0 \end{aligned}$$

- Quando num processo de nascimento $\lambda_k = k\beta$, para $k = n_0, n_0 + 1, \ldots$, em que n_0 representa o tamanho da população no instante 0, obtem-se o *processo de Furry-Yule.* Neste caso as equações diferenciais podem ser resolvidas explicitamente, obtendo-se

$$P_n(t) = \binom{n - 1}{n - n_0} \mathrm{e}^{-n_0 \beta t} \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}\right)^{n - n_0} \quad n = n_0, n_0 + 1, \ldots.$$

5 Processo de nascimento e morte

- *Equações diferenciais progressivas*:

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t) \;\; j \geq 1$$

$$P'_{i0}(t) = -\lambda_0 P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i1}(t)$$

sujeitas às condições iniciais $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

- *Equações diferenciais regressivas*:

$$P'_{ij}(t) = \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{ij}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t) \;\; i \geq 1$$

$$P'_{0j}(t) = -\lambda_0 P_{0j}(t) + \lambda_0 P_{1j}(t)$$

sujeitas às condições iniciais $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

- *Distribuição limite* π_j, $j = 0, 1, ...$: Se $\sum_0^\infty \theta_k < \infty$ com

$$\theta_0 = 1, \quad \theta_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_j}, \;\; j \geq 1,$$

tem-se que

$$\pi_j = \theta_j \pi_0, \;\; j = 0, 1, 2, \ldots,$$

com

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k\right]^{-1}.$$

- *Crescimento linear com imigração* Um processo de nascimento e morte é designado por processo linear de crescimento com imigração quando $\lambda_n = n\lambda + a$ e $\mu_n = n\mu$, com $\lambda, \mu > 0$. e $a > 0$. Neste caso $\pi_0 = (1 - \lambda/\mu)^{a/\lambda}$ e

$$\pi_j = \begin{pmatrix} a/\lambda + j - 1 \\ j \end{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{a/\lambda}.$$

- *Modelos de Reparação* N máquinas, M em funcionamento (com $M \leq N$), R capacidade de reparação. Cada máquina, quando em funcionamento, funciona durante um período aleatório exponencialmente distribuído com parâmetro μ, até avariar. O tempo de reparação de cada máquina é exponencialmente distribuído com parâmetro λ.

  $X(t)$ - número de máquinas em boas condições em t. $\{X(t)\}$ é um processo de nascimento e morte com número finito de estados com parâmetros

$$\lambda_n = \lambda \min\{N - n, R\}$$

  e

$$\mu_n = \mu \min\{n, M\}.$$

  A distribuição estacionária toma formas simples nalguns casos particulares. Por exemplo quando $M = N = R$, tem-se que

$$\pi_j = \begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^j \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{N-j},$$

  que corresponde à distribuição binomial.

- *Filas de espera*

  - **Modelo** $(M|M|1)$

$$\begin{aligned} \pi_j &= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = (1-\rho)\rho^j, \quad \rho = \lambda/\mu. \\ L &= \frac{\rho}{1-\rho} \\ L_q &= \frac{\rho^2}{1-\rho} \end{aligned}$$

    Designando por T o tempo de espera no sistema, no caso estacionário, com $\lambda < \mu$, tem-se que T tem distribuição exponencial com parâmetro $\mu - \lambda$.

    Designando por T_q o tempo de espera na fila, no caso estacionário, com $\lambda < \mu$, tem-se que T_q tem função de distribuição $1 - \rho \exp(-(\mu - \lambda)t)$, $t \geq 0$.

– **Modelo** $(M|M|s)$

$$\pi_j = \begin{cases} (\theta^j/j!)\pi_0 & j < s \\ (s^s/s!)(\theta/s)^j\pi_0 & j \geq s \end{cases}$$

$$\pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{s-1} \frac{\theta^j}{j!} + \frac{\theta^s}{s!(1-\rho)}\right]^{-1}.$$

$$L_q = \pi_s \frac{\rho}{(1-\rho)^2},$$

com $\theta = \lambda/\mu$ e $\rho = \theta/s$.

Designando por T_q o tempo de espera na fila, no caso estacionário, com $\rho < 1$, tem-se que T_q tem função de distribuição $1 - \pi_s \frac{1}{1-\rho} \exp(-(s\mu - \lambda)t)$, $t \geq 0$.

- *Caso de processos de nascimento e morte com o estado 0 absorvente* $(\lambda_0 = 0)$

  Seja u_i a probabilidade de absorção no estado 0 quando o processso se inicia em i e

$$\rho_i = \frac{\mu_1\mu_2...\mu_i}{\lambda_1\lambda_2...\lambda_i}$$

então se $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < +\infty$ tem-se

$$u_1 = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i}$$

e

$$u_m = \frac{\sum_{i=m}^{\infty} \rho_i}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i}.$$

Seja w_i o tempo médio até à absorção partindo de i. Quando $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i = +\infty$ e $\sum_{i=1}^{\infty} 1/(\lambda_i\rho_i) < +\infty$ tem-se que

$$w_m = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i\rho_i} + \sum_{k=1}^{m-1} \rho_k \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j\rho_j}.$$

6 Martingalas a tempo discreto

Desigualdade de Kolmogorov para supermartingalas não negativas: Seja $\{X_n\}$ uma supermartingala não negativa ($X_n \geq 0$, $\forall n$). Então para qualquer m positivo,

$$\Pr\{\max_{0 \leq n < \infty} X_n > m\} \leq \frac{\mathrm{E}[X_0]}{m}.$$

7 Movimento Browniano

Seja $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ a ser um movimento Browniano standard.

$$\Pr\{T_x \leq t\} = 2\left(1 - \Phi\left(x/\sqrt{t}\right)\right),$$

com $T_x = \min\{\tau \geq 0 : B(\tau) = x\}$.
Com $M(t) = \max_{0\leq u\leq t} B(u)$, tem-se

$$\Pr\{M(t) \geq x\} = \Pr\{T_x \leq t\}.$$

Seja $\vartheta(t, t+s)$ a probabilidade de que $B(t)$ tome o valor zero pelo menos uma vez no intervalo $(t, t+s)$. Então

$$\vartheta(t, t+s) = \frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{t}{t+s}} = \frac{2}{\pi}\arctan\sqrt{\frac{s}{t}}.$$

O movimento Browniano com parâmetro de deriva μ e coeficiente de difusão σ^2 é o processo $\{W(t)\}$, com $W(t) = \mu t + \sigma B(t)$.
Sendo $T_{ab} = \min\{t \geq 0; W(t) = a \text{ ou } W(t) = b\}$, tem-se:

$$\Pr\{W(T_{ab}) = b | W(0) = x\} = \frac{\exp(-2\mu x/\sigma^2) - \exp(-2\mu a/\sigma^2)}{\exp(-2\mu b/\sigma^2) - \exp(-2\mu a/\sigma^2)}$$

$\{X(t)\}_{t\geq 0}$ é um movimento Browniano geométrico, começando em $X(0)$, se

$$X(t) = X(0)\exp\left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)\right].$$

No movimento Browniano geométrico:

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= X(0)\exp(\alpha t) \\ Var[X(t)] &= X(0)^2\exp(2\alpha t)\exp(\sigma^2 t - 1) \end{aligned}$$

Fórmula de Black-Scholes:

$$E[e^{-rt}(X_t - K)^+] = X_0\Phi(\sigma\sqrt{t} - \alpha) - e^{-rt}K\Phi(-\alpha)$$

com $\alpha = (\log(K/X_0) - \mu t)/(\sigma\sqrt{t})$ e $\mu = r - \sigma^2/2$, sendo r a taxa de juro, t a maturidade e K o preço de exercício.

8 Distribuições

Nome da Família Paramétrica de Distribuições	Função de Probabilidade ou Função de Densidade de Probabilidade	Espaço dos Parâmetros	Valor Esperado $\mu = E(X)$	Variância $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$	Momentos $\alpha_r = E(X^r)$ ou $\mu_r = E[(X-\mu)^r]$	Função Geradora de Momementos $M(r) = E[e^{rX}]$
Binomial	$f(x) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}$ $x = 0, 1, \ldots, N$	$0 \leq p \leq 1$ $(q = 1-p)$ $N = 1, 2, \ldots$	Np	Npq	$\mu_3 = Npq(q-p)$	$(q + pe^r)^N$
Poisson	$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ $x = 0, 1, \ldots$	$\lambda > 0$	λ	λ	$\mu_3 = \lambda$	$e^{\lambda(e^r - 1)}$
Binomial Negativa	$f(x) = \binom{\alpha + x - 1}{x} p^\alpha q^x$ $x = 0, 1, \ldots$	$0 \leq p \leq 1$ $(q = 1-p)$ $\alpha > 0$	$\frac{\alpha q}{p}$	$\frac{\alpha q}{p^2}$	$\mu_3 = \frac{\alpha(q+q^2)}{p^3}$	$p^\alpha\,(1 - qe^r)^{-\alpha}$
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $a < x < b$	$-\infty < a < b < +\infty$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\mu_r = \begin{cases} 0 & r \text{ ímpar} \\ \frac{(b-a)^r}{2^r(r+1)} & r \text{ par} \end{cases}$	$\frac{e^{br} - e^{ar}}{(b-a)r}$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < x < +\infty$	$-\infty < \mu < +\infty$ $\sigma > 0$	μ	σ^2	$\mu_r = \begin{cases} 0 & r \text{ ímpar} \\ \frac{r!\sigma^r}{(r/2)!2^{r/2}} & r \text{ par} \end{cases}$	$e^{\mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2}$
Lognormal	$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x > 0$	$-\infty < \mu < +\infty$ $\sigma > 0$	$e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$	$e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}$	$\alpha_r = e^{r\mu + \frac{1}{2}r^2\sigma^2}$	Não existe
Gama	$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha - 1}$ $x > 0$	$\alpha > 0$ $\beta > 0$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\alpha_r = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\beta^r \Gamma(\alpha)}$	$\left(1 - \frac{r}{\beta}\right)^{-\alpha}$ $r < \beta$
Pareto	$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta + x)^{\alpha+1}}$ $x > 0$	$\alpha > 0$ $\beta > 0$	$\frac{\beta}{\alpha - 1}$ para $\alpha > 1$	$\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$ para $\alpha > 2$	$\alpha_r = \frac{\Gamma(\alpha - r)}{\Gamma(\alpha)}\beta^r r!$ para $\alpha > r$	Não existe