Instituto Superior de Economia e Gestão

Análise Matemática II

Licenciatura em MAEG

Lista de Exercícios

Ano lectivo 2011-2012 (2^o Semestre)

1 Séries de termos reais

Exercício 1.1 *Determine que valores de x tornam as séries seguintes convergentes e calcule a sua soma.*

a) $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^n$ *b)* $\sum\limits_{n\geq 0}(1-|x|)^n$

c) $\sum\limits_{n\geq 0} x$ *d)* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x}{n^2+n}$.

Exercício 1.2 *Utilize a teoria das séries geométricas para calcular os racionais correspondentes às dízimas infinitas periódicas:*

a) $3,66666(6)$ *b)* $1,1818(18)$ *c)* $1,0108(08)$

d) $1,123(123)$ *e)* $0,99999(9)$.

Exercício 1.3 *Calcule a soma das seguintes séries:*

a) $\sum\limits_{n\geq 0} 3^{-(5n+1)}$ *b)* $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{2^n+3^n}{6^n}$ *c)* $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{n^2-1}$

d) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{(2n-3)(2n-1)}$ *e)* $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{1}{2^{n-2}}+\dfrac{3}{2^n}\right)$

Exercício 1.4 *Prove que se* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *existir e fôr finito, então a série* $\sum\limits_{n\geq 1}(a_n-a_{n+k})$ *é convergente e a sua soma é* $a_1+a_2+...+a_k-k\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Exercício 1.5 *Determine a natureza das seguintes séries e a soma das que são convergentes:*

a) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ *b)* $\sum\limits_{n\geq 3}\dfrac{1}{n^2-4}$ *c)* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+k)}$, $k\in\mathbb{R}$

d) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ *e)* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+3)(n+6)}$.

Exercício 1.6 *Mostre que se* $a_n\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$, *e* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *converge, então* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{a_n}$ *é divergente.*

Exercício 1.7 *Sendo* a_n *uma sucessão real tal que* $a_n\to+\infty$, *indique, justificando, a natureza da série* $\sum\dfrac{a_n}{1+a_n}$.

Exercício 1.8 *Estude, utilizando o critério de comparação ou um dos seus corolários, a natureza das seguintes séries:*

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3-1}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n\left(n^2+1\right)}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{3+(-1)^n}\right)^n$ *e)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

g) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\log n}$ *h)* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^4-3n^2-1}$ *i)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{e^{-1/n}}{n^k}$

j) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n\sqrt{n}}e^n$ *k)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(n\cdot\operatorname{sen}\frac{2}{n}\right)^{2n}$ *l)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

m) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{n+1}\right)^n$ *n)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{2n+3}\right)^{n\sqrt{n}}$ *o)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(n\operatorname{sen}\frac{k}{n}\right)^{2n}$ *com* $|k|\neq 1$

p) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}e^{-n}\left(\log n\right)^n$ *q)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n+1}{n}e^{-n}$ *r)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}}$

s) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n\sqrt{n+1}}{(n+1)^3\sqrt[3]{n^2+n}}$ *t)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)$ *u)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+1}\left(\frac{9}{8}\right)^n$

v) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}n!\left(\frac{3}{4}\right)^{n^2}$ *w)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}n\frac{1}{\left(a^2+2\right)^n}$ *x)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\left(\frac{10}{9}\right)^{n^2}.$

Exercício 1.9 *Sejam* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *duas séries convergentes de termos positivos. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:*

a) $\displaystyle\sum\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)$ *b)* $\displaystyle\sum\frac{n+1}{n}a_n.$

Exercício 1.10 *Estude, quanto à natureza, a série de termo geral* $\dfrac{a^n}{1+b^n}$ *nos seguintes casos:*

a) $0<a<b$
b) $0<b\leq a<1$
c) $1\leq b\leq a.$

Exercício 1.11 *Sejam* a_n *e* b_n *duas sucessões de termos positivos tais que a série* $\sum a_n$ *e a série* $\sum\left(b_n-b_{n+1}\right)$ *são convergentes. Mostre que a série* $\sum\left(a_nb_n\right)$ *é uma série convergente.*

Exercício 1.12 *Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as seguintes séries:*

$$a)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad b)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\left(n^2+1\right)}{n^2+n+3} \qquad c)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n n}{n^2\sqrt{n}} \qquad d)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n n}{6n-5} \qquad f)\ \sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n \qquad g)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\log n}{n}.$$

Exercício 1.13 *Considere a série* $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$.

a) Justifique que se trata de uma série convergente e calcule a soma da série com um erro inferior a $0,01$.

b) Indique um majorante do erro que comete quando aproxima a soma da série pela soma dos 3 primeiros termos.

Exercício 1.14 *Seja* a_n *uma sucessão tal que a série* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente. Prove que a série* $\sum a_n^2$ *também o é. Dê um exemplo que mostre que o recíproco não é verdadeiro.*

Exercício 1.15 *Determine os intervalos de convergência das seguintes séries de potências:*

$$a)\ \sum_{n\geq 1}(n+1)^{-1/2}(x+1)^n \qquad b)\ \sum_{n\geq 1}n\,(x-2)^{n-1} \qquad c)\ \sum_{n\geq 1}\tbinom{n+4}{5}x^{4n}$$

$$d)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1.3....(2n+1)}{2.4....(2n+2)}\,\frac{1}{n+1}\,(x-1)^n.$$

Exercício 1.16 *Calcule as somas das seguintes séries nos respectivos intervalos de convergência:*

$$a)\ \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n} \qquad b)\ \sum_{n\geq 1}nx^n \qquad c)\ \sum_{n\geq 1}n^2x^n$$

$$d)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n+1}(x-1)^{2n+1} \qquad e)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}(x-1)^{n+1}.$$

Exercício 1.17 *Desenvolva a função* $\log x$ *em série de potências de* $x-2$, *indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.*

Exercício 1.18 *Desenvolva a função* $\dfrac{1}{x^2}$ *em série de potências de* $x+1$, *indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.*

Exercício 1.19 *Considere a função* $f(x) = e^x$.

a) *Calcule a sua série de MacLaurin e prove que a função é soma da sua série de Mac-Laurin para todo o* $x \in \mathbb{R}$.

b) *Com base na alínea anterior prove que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Exercício 1.20 *Escreva o desenvolvimento de MacLaurin das seguintes funções:*

a) $f(x) = a^x$, $a > 0$ b) $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$ c) $f(x) = \cos x$.

Exercício 1.21 *Desenvolva em série de MacLaurin a função* $x\log\left(1 + x^3\right)$ *e justifique que a função tem um mínimo no ponto* $x = 0$.

Exercício 1.22 *Desenvolva em série de potências de* $x - 1$, *a função* $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = x^2 \log(x^2)$, *indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.*

Exercício 1.23 *Desenvolva em série de potências de* $x - 2$ *a função* $\dfrac{4}{3x}$, *indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Utilize o resultado obtido para determinar o valor de* $f^{(17)}(2)$.

Exercício 1.24 *Desenvolva em série de MacLaurin a função* $2^x + \dfrac{1}{2+x}$ *e indique, justificando, o intervalo de convergência da série obtida.*

Exercício 1.25 *Calcule o polinómio de Taylor de grau 2 da função* $f(x) = \int_1^{u(x)} \ln t\, dt$ *no ponto* $x = 2$, *sabendo que a função* $u(x)$ *é de classe* $C^2(\mathbb{R})$, *tem por contradomínio o conjunto* $[1, +\infty)$ *e* $u(2) = 1$.

Exercício 1.26 *Utilize a fórmula de MacLaurin para provar a fórmula do Binómio de Newton,*

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n.$$

2 Noções Topológicas e Sucessões em $\mathbb{R}^n$

Exercício 2.1 *Considere o conjunto* $C([0,1])$ *das funções contínuas no intervalo* $[0,1]$. *Defina para* $f, g \in C([0,1])$,

$$d^*(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Mostre que $d^*(f,g)$ *define uma distância em* $C([0,1])$.

Exercício 2.2 *Considere o conjunto* $\boldsymbol{E}$ *um conjunto qualquer e defina para* $x, y \in E$,

$$d^*(x,y) = \begin{cases} 0 & se \;\; x = y \\ 1 & se \;\; x \neq y \end{cases}.$$

(a) Mostre que $d^*(x,y)$ *é uma distância.*

(b) Defina a bola de centro em $a \in E$ *e de raio* ε.

Exercício 2.3 *Considere em* $\mathbb{R}^n$ *as seguintes aplicações*

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$$

(a) Mostre que todas estas aplicações definem normas em $\mathbb{R}^n$.

(b) Para cada uma das normas consideradas calcule $d(x,y) = ||x - y||$.

(c) Interprete geometricamente as distâncias calculadas.

Exercício 2.4 *Representе geometricamente os seguintes subconjuntos de* $\mathbb{R}^2$ *e defina analiticamente o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de cada um deles:*

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + x \leq 2 \text{ e } xy \geq 0\}$

(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$

(c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \dfrac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq y + x \leq 1\right\}$

(d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \text{ e } y > 0\} \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq 1 \text{ e } x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercício 2.5 *Seja* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Prove que*

(a) A *é um conjunto aberto se e só se* $A \cap frontA = \emptyset$.

(b) A *é um conjunto aberto se e só se* $\mathbb{R}^n \setminus A$ *é um conjunto fechado.*

(c) Prove, utilizando o resultado anterior, que a intersecção de conjuntos fechados é sempre um conjunto fechado.

Exercício 2.6 *Considere o seguinte conjunto* $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\right\}$.

(a) Dê um exemplo de uma sucessão de pontos que pertença a X *que convirja para um ponto que não pertence a* X.

(b) Poderá encontrar uma sucessão de pontos que não pertencem a X *convergente para um ponto de* X*? Justifique.*

Exercício 2.7 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \frac{1}{1 - \ln\left(x^2+y^2\right)} + \sqrt{x-y}.$$

Determine o domínio de f, D_f, *represente-o geometricamente e diga, justificando, se* D_f *é um conjunto aberto e/ou fechado.*

Exercício 2.8 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{(1-x)(1-y)}.$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, *e represente-o geometricamente.*

(b) Defina analiticamente o interior e a fronteira de D_f.

(c) D_f *é um conjunto aberto? E fechado? Justifique.*

Exercício 2.9 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \frac{1}{\ln\left(1 - x^2 - (y+1)^2\right)}.$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, *e represente-o geometricamente.*

(b) Defina analiticamente o interior e a fronteira de D_f.

(c) D_f *é um conjunto compacto? Justifique.*

Exercício 2.10 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(1 - sen x)(y - x^2)}}{\ln(x+y-2)}.$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, *e represente-o geometricamente.*

(b) Defina analiticamente a fronteira de D_f.

(c) D_f *é um conjunto aberto? E fechado? Justifique.*

Exercício 2.11 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x, y) = \sqrt{(x-2)\,(16 - x^2 - y^2)}.$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, *e represente-o geometricamente.*

(b) Indique, justificando, se D_f *é um conjunto compacto.*

Exercício 2.12 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x, y) = \ln(xy)\sqrt{\left(1 - x^2 - (y-1)^2\right)}.$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, *e represente-o geometricamente.*

(b) Defina analiticamente a fronteira de D_f *e indique, justificando, se* D_f *é um conjunto compacto.*

3 Limites e continuidade em $\mathbb{R}^n$

Exercício 3.1 *Calcule ou prove que não existem os limites das seguintes funções nos pontos indicados:*

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x-1}{y-x+1}$ *b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^2}{x-y}$ *d)* $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \frac{x+y-2}{xyz}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2}$ *f)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^3+y-1}{3x^3+y^3-1}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$ *h)* $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,1,1)} \frac{y^2}{x}(z+3)\,sen\,(4x)$

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^4+2y^2}$ *j)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log^2(x+y)}{sen\,(\log\,(x+y))}$

k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-y^2-1}{x-1}$ *l)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2\sqrt{|y-1|}}{x^2+(y-1)^2}$

m) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \frac{z+(x-1)\,z+z^2}{1-xy+zx}$

Exercício 3.2 *Seja* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função definida por* $f(x,y) = \left(x^2+y\right) sen\left(\frac{1}{xy}\right)$.

(a) Justifique que não existe $\displaystyle\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)$ *e não existe* $\displaystyle\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)$.

(b) Prove que existe limite da função no ponto $(0,0)$ *e conclua que pode existir limite de uma função num ponto sem que existam os limites iterados.*

Exercício 3.3 *Estude a continuidade das seguintes funções nos pontos indicados:*

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 seny}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ *no ponto* $(0,0)$.

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2\,y^2}{(x-1)^2+y^2}+y & se \quad (x,y)\neq(1,0) \\ 0 & se \quad (x,y)=(1,0) \end{cases}$ *no ponto* $(1,0)$.

c) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ *no ponto* $(0,0)$.

Exercício 3.4 *Determine o valor do parâmetro real* α *de modo que a seguinte função tenha limite no ponto* $(1,1)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\alpha & se\ \ x\geq 0, y\geq 0\ \ e\ y\neq x\\[2ex] \dfrac{x^2+1}{y^2+1}-\alpha & caso\ contrário\end{cases}$$

Exercício 3.5 *Seja* $f: D_f\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *a função definida por* $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x+y}$.

(a) Para cada $m\in\mathbb{R}$ *e cada* $k\in\mathbb{N}$ *seja* $A_{k,m}=\left\{(x,y)\in D_f: y=mx^k\right\}$. *Calcule para cada par* (k,m) *o limite de* f *no ponto* $(0,0)$ *relativo ao conjunto* $A_{k,m}$.

(b) Considere o conjunto $X=\left\{(x,y)\in D_f: y=-x+x^2\right\}$ *e calcule o limite de* f *no ponto* $(0,0)$ *relativo ao conjunto* X.

(c) Que pode concluir sobre a existência de limite de f *no ponto* $(0,0)$*?*

Exercício 3.6 *Considere a função* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases}k+\exp\left(-\dfrac{1}{|x^2+y^2-4|}\right) & se\ \ x^2+y^2\geq 4\\[2ex] 5 & se\ \ x^2+y^2\leq 4\end{cases}.$$

Determine o valor de k *de modo a que a função seja contínua em* $\mathbb{R}^2$.

Exercício 3.7 *Verifique se as seguintes funções são prolongáveis por continuidade a* $\mathbb{R}^2$*:*

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ *(b)* $f(x,y)=\dfrac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

(c) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$ *(d)* $f(x,y)=x\,sen\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

Exercício 3.8 *Seja* $f: D_f\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *a função definida por* $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$. *A função pode ser prolongável por continuidade a* $\mathbb{R}^2$*? Em caso afirmativo determine o prolongamento contínuo de* f.

Exercício 3.9 *Determine os pontos de descontinuidade das funções assim definidas:*

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x^2} & se\ \ x\neq 0\ e\ x\neq 1\\[2ex] 1+y & se\ \ x=0\\[2ex] y & se\ \ x=1\end{cases}$ *b)* $f(x,y)=\left(y^2-4y+3\right)sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercício 3.10 *Considere a função* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x\,(2 - sen x)}{1 - |y|}}$.

(a) *Determine o domínio de* f, D_f, *e represente-o geometricamente.*

(b) *Defina analiticamente a fronteira de* D_f *e indique, justificando, se* D_f *é um conjunto aberto e/ou fechado.*

(c) *Justifique se* f *é prolongável por continuidade ao ponto* $(0, 1)$.

4 Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

Exercício 4.1 *Calcule as funções derivadas parciais de 1ª ordem para as seguintes funções, indicando o respectivo domínio:*

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sen\,(xy)}{x} & se \;\; x \neq 0 \\ \\ y^2 - y & se \;\; x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - yx & se \;\; x \neq y \\ \\ x & se \;\; x = y \end{cases}$

Exercício 4.2 *Considere a função* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verifique que a função tem derivadas parciais em todo o seu domínio mas não é contínua na origem.

Exercício 4.3 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & se \quad xy = 0 \\ \sqrt{x^2+y^2} & se \quad xy \neq 0. \end{cases}$$

(a) *Calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) *Prove que não existe* $f'_v(0,0)$, *qualquer que seja o vector* $v \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $v_1 v_2 \neq 0$.

(c) *O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de* f *no ponto* $(0,0)$*?*

Exercício 4.4 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) *Estude a continuidade de* f *em* $\mathbb{R}^2$.

(b) *Mostre que* $f(tx,ty) = tf(x,y)$ *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *e todo* $t \in \mathbb{R}$.

(c) *Utilize a alínea anterior para provar que* $f'_v(0,0) = f(v)$ *para todo* $v \in \mathbb{R}^2$.

(d) *Utilize a alínea anterior para calcular* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(e) *Estude a diferenciabilidade de* f *no ponto* $(0,0)$.

Exercício 4.5 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 1 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f *em* $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule o gradiente de f *no ponto* $(1,1)$.

(c) Estude a diferenciabilidade de f *no ponto* $(0,0)$.

Exercício 4.6 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right) sen \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *e mostre que são descontínuas em* $(0,0)$.

(c) Verifique que f *é diferenciável na origem.*

Exercício 4.7 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x-y)}{x+y} & se \quad x+y \neq 0 \\ \\ 0 \quad se & x+y = 0. \end{cases}$$

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *nos pontos da forma* $(a,-a)$ *com* $a \neq 0$*?*

(c) Calcule a função derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *e estude a sua continuidade.*

(d) Calcule $f'_{(1,-1)}(2,3)$.

(e) Estude a continuidade de f *em* $\mathbb{R}^2$.

(f) Estude a diferenciabilidade de f *em* $\mathbb{R}^2$.

(g) Calcule $\nabla f(1,0)$.

(h) Calcule $f'_{(1,1)}(0,0)$ *e* $f'_{(1,1)}(1,0)$.

Exercício 4.8 *Calcule a segunda diferencial de* $f(x,y) = \sqrt{xy}$ *no- ponto* $(1,1)$.

Exercício 4.9 *Seja* h *uma função diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e considere a função* f *definida por* $f(x,y) = tg(x)h(x+\cos y)$. *Mostre que para todo o ponto* $(x,y) \in D_f$, *se tem*

$$seny\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)\frac{seny}{senx.\cos x}.$$

Exercício 4.10 *Seja* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *e considere a função* g *definida por* $g(x,y) = f(\frac{y}{x})$. *Mostre que para todo o ponto* $(x,y) \in D_g$, *se tem*

$$x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x,y).$$

Exercício 4.11 *Seja* f *uma função diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e considere a função* g *definida por* $g(x,y) = \cos^2 x.f(y+tgx)$. *Prove que para todo o ponto* $(x,y) \in D_g$, *se tem*

$$\frac{1}{\cos^2 x}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2tgx.g(x,y).$$

Exercício 4.12 *Usando a regra da derivada da função composta, calcule* $\frac{dw}{dt}$ *sabendo que*

$$w = xyf(z), x = t^2, y = e^t, z = \ln t^2,$$

e f *é uma função real de variável real diferenciável.*

Exercício 4.13 *Seja* F *uma função real de variável real diferenciável e* $z = xy + xF(\frac{y}{x})$. *Mostre que para todo o* $x \neq 0$, *se tem*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

Exercício 4.14 *Sejam* ϕ, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções de classe* C^2 *e* $z = x\phi(x+y) + y\psi(x+y)$. *Mostre que*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Exercício 4.15 *Seja* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *uma função de classe* C^1 *e* $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *definida por* $v(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho sen\theta)$. *Mostre que* $\phi = u \circ v$ *é tal que*

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Exercício 4.16 *Considere as funções,* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $g(x,y,z) = (e^{x^2+y^2+z^2}, 1-xyz^2)$ *e* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *uma função cuja matriz jacobiana no ponto* $(e^3, 2)$ *é dada por*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz jacobiana de $f \circ g$ *no ponto* $(1,-1,1)$.

Exercício 4.17 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = f'(1) = 2$ e $f(2) = f'(2) = 1$. Considere $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(x, y, z) = (f(x^2) + f(x^2 + y^2), f(xyz))$.*

(a) Calcule a matriz jacobiana de g.

(b) Sendo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = e^{3-x^2+yx}$, justifique que $h \circ g$ é diferenciável no ponto $(1, 1, 2)$ e calcule a matriz jacobiana de $h \circ g$ nesse ponto.

Exercício 4.18 *Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{5/3}y^2}{(x^2+y^2)^{4/3}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(t) = (t, t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere ainda a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(t) = (f \circ g)(t) = f(t, t)$.

(a) Indique o valor de $F(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

(b) Calcule o valor de $F'(0)$: i) utilizando a expressão de $F(t)$ obtida na alínea anterior; ii) através da regra da derivação da função composta.

(c) O que pode concluir do facto de ter obtido diferentes resultados nas alíneas i) e ii)?

Exercício 4.19 *Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 para a função $f(x, y) = senx seny$ no ponto $(0, 0)$ com resto de Lagrange.*

Exercício 4.20 *Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 para a função $f(x, y) = \dfrac{y}{y+x}$ no ponto $(1, 0)$ com resto de Lagrange.*

Exercício 4.21 *Determine os extremantes e correspondentes extremos das funções:*

a) $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) e^y$ *b)* $f(x, y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$

c) $f(x, y, z) = xy + xz$ *d)* $f(x, y) = xseny$

e) $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^4$

Exercício 4.22 *Averigue se o ponto $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$ é extremante da função $f(x, y, z) = x^2 + 2xy^2 + y^4 + z^2$.*

Exercício 4.23 *Determine, em função de β, os extremantes da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = xy + xz - x^3 - y^2 - \beta x$.*

Exercício 4.24 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = e^{xy+xy^2+x^2}$. Determine os pontos críticos de f e classifique-os.*

Exercício 4.25 *Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4$.*

(a) Prove que os pontos críticos de f são $(1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(0, 0)$.

(b) Indique, justificando, se os pontos $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ são extremantes da função f e, caso sejam, determine os respectivos valores extremos.

(c) Prove que o ponto $(0, 0)$ não é extremante da função f.

5 Análise Complexa

Exercício 5.1 *Determine 2 números complexos cuja soma seja 4 e cujo produto seja 8.*

Exercício 5.2 *Calcule:*

a) $(1-i)^2(2+i)$ *b)* $\overline{1+i}\cdot(2-i)$ *c)* $\dfrac{i}{2+2i}$

c) $\left|\dfrac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(3-4i)}\right|$ *d)* $\dfrac{|1+i|(1+2i)}{1-i}$ *e)* $(1-\frac{i}{2})^2$

Exercício 5.3 *Resolva em* $\mathbb{C}$ *as seguintes equações*

a) $z^3+2z=0$ *b)* $z^3+iz^2-iz+1=0$

c) $z^7+z^4-16z^3-16=0$ *d)* $z^2+2z+3=0$

Exercício 5.4 *Prove que se* $z\in\mathbb{C}$ *é tal que* $|z|=2$*, então* $\dfrac{1}{z^4-4z^2+3}\leq\frac{1}{3}$.

Exercício 5.5 *Dados* $z_1,z_2\neq 0$ *em* $\mathbb{C}$*, prove que* $Re(z_1z_2)=|z_1||z_2|$ *se e só se* $arg(z_1)-arg(z_2)=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Exercício 5.6 *Mostre que para qualquer número complexo* z *se tem* $|z|\leq|Re(z)|+|Im(z)|\leq\sqrt{2}|z|$*. Indique exemplos de números complexos que verifiquem cada uma das igualdades.*

Exercício 5.7 *Mostre que para qualquer número complexo* $z\neq 0$ *se tem* $Re(z)>0\Leftrightarrow Re(1/z)>0$.

Exercício 5.8 *Escreva na forma trigonométrica cada um dos seguintes números complexos:*

a) $\dfrac{1-i}{1+\sqrt{3}i}$ *b)* $(\cos\frac{1}{2}-i\sin\frac{1}{2})^2$ *c)* $(1+i)^7$

Exercício 5.9 *Prove que:*

a) $(-1+i)^7=-8(1+i)$ *b)* $(1+\sqrt{3})^{-10}=2^{-11}(-1+\sqrt{3}i)$

Exercício 5.10 *Mostre que se* $z\neq 1$ *se tem* $1+z+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

Exercício 5.11 *Represente graficamente os seguintes subconjuntos de* $\mathbb{C}$ *e defina analiticamente o seu interior, fronteira e aderência. Refira também se são abertos, fechados, limitados e conexos.*

a) $\{z\in\mathbb{C}:z\overline{z}=16\}$ *b)* $\{z\in\mathbb{C}:z+\overline{z}=4\}$

c) $z\in\mathbb{C}:|z+1|>|z-1+i|$ *d)* $\{z\in\mathbb{C}:|Re(z)|+|Im(z)|\leq 1\}$

e) $z\in\mathbb{C}:1<|z|<2, |arg(z)|<\frac{\pi}{4}$ *f)* $\{z\in\mathbb{C}:Re(z^2)>0\}$

Exercício 5.12 *Estude quanto à sua natureza as seguintes sucessões de números complexos, indicando o limite das que forem convergentes.*

a) $z_n = (-1)^n + \dfrac{i}{n}$ *b)* $z_n = \dfrac{n + i(n+1)}{2n+2}$

c) $z_n = \dfrac{2^n}{n!} + i\dfrac{n}{2^n}$ *d)* $z_n = i^n$

Exercício 5.13 *Determine os valores de z para os quais existem os limites seguintes:*
a) $\lim \dfrac{z^n}{n!}$ *b)* $\lim \left(\dfrac{z}{n}\right)^n$ *c)* $\lim z^n$

Exercício 5.14 *Mostre que se as séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$ forem absolutamente convergente, então a série $\sum(x_n + iy_n)$ também é absolutamente convergente.*

Exercício 5.15 *Mostre que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ é convergente se e só se $|z| < 1$ e que nesse caso a soma da série é dada por $1/(1-z)$.*

Exercício 5.16 *Estude quanto à convergência simples e absoluta as séries seguintes:*
a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+i}{(n-1)!}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{2n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+i}{2^n}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$

Exercício 5.17 *Calcule, considerando quando necessário o ramo principal da função logaritmo.*
a) e^{1-i} *b)* $\log(2i+2)$ *c)* $\log(-1)$

c) 5^{i+1} *d)* $(\sqrt{3})^i$ *e)* $(1+i)^(1-i)$

f) $\cos(i)$ *g)* $\sin(2i+1)$ *h)* $\tan(-\pi i)$

i) $\arccos(i)$

Exercício 5.18 *Determine a parte real e imaginária das funções:*
a) $f(z) = z^2 + 3z - 2i$ *b)* $f(z) = \dfrac{z+2}{z-1}$ *c)* $f(z) = 3i\overline{z} + 4(i+z)$.

Exercício 5.19 *Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações:*
a) $e^z = 1+i$ *b)* $e^z = -1$ *c)* $\cos(z) = 2$ *d)* $e^z = e^{iz}$

Exercício 5.20 *Considerando que $z = x + iy$, calcule os seguintes limites:*
a) $\displaystyle\lim_{z\to -1+2i} (3xy + i(x-y)^2)$ *b)* $\displaystyle\lim_{z\to 1+i} \frac{z^2-5}{iz}$ *c)* $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{z(z^2+1}{z-i}$

Exercício 5.21 *Mostre que f é contínua em z_0 se e só se $\overline{f}$ é contínua em z_0.*

Exercício 5.22 *Use o resultado do exercício anterior para concluir que se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função contínua num certo ponto $z_0 \in \mathbb{C}$, também os são as funções $Re(f)$, $Im(f)$ e $|f|$.*

Exercício 5.23 *Determine o maior subconjunto de $\mathbb{C}$ onde as seguintes funções são contínuas:*

a) $f(z) = \log(z+1-i)$ *b)* $f(z) = \sqrt{z^2+1}$ *c)* $f(z) = \dfrac{e^{z+1}}{z^2+z+1}$

Exercício 5.24 *Determine o maior subconjunto de $\mathbb{C}$ onde as seguintes funções são diferenciáveis*

a) $f(x+iy) = -(e^y - e^{-y})\cos x + i(e^y+e^{-y})\sin x$ *b)* $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{|z^2|}$ *c)* $\log_0(z+1)$

Exercício 5.25 *Determine $u(x,y)$ de modo que $f(x+iy) = u(x,u) + i(x^3+y^3-3x^2y-3xy^2)$ seja holomorfa em $\mathbb{C}$ e $f(0)=0$.*

Exercício 5.26 *Sejam $u_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}(n \in \mathbb{N}_0)$ definidas por $u(x,y) = x^k - y^k$. Calcule os valores de k para os quais existem funções f_k holomorfas tais que $Re(f_k) = u_k$ e determine-as.*

Exercício 5.27 *Determine as funções harmónicas conjugadas de $w(x,y) = x^2 - 3x - y^2$.*