



# Sistemas de Apoio à Decisão

aula 2

Cap. 1

Instituto Superior  
de Economia e Gestão  
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA  
DESDE 1911

## Complementos de PL

Instituto Superior de Economia e Gestão  
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

### Definições

**Forma aumentada de um PL** - PL com:

todas as variáveis são não negativas e  
todas as restrições funcionais estão expressas por equações

↑ + variáveis não negativas

variáveis auxiliares ou variáveis desvio ou variáveis de folga

**Solução aumentada** - uma solução do problema na forma aumentada.

### Propriedades

**Propriedade 5:** Qualquer problema de PL pode ser escrito como um problema de PL equivalente na forma aumentada de maximização.

18



## Complementos de PL

### Passagem de modelos de PL à forma aumentada de maximização

**Objetivo:**  $\text{Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \Leftrightarrow \text{Max}(-Z) = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$  (Min  $Z = -\text{Max}(-Z)$ )

#### Restrições:

$$“\leq” : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \wedge x_{n+i} \geq 0$$

$$“\geq” : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \wedge x_{n+i} \geq 0$$

#### Variáveis:

$$x_j \leq 0 \Leftrightarrow x_j = -x'_j (x'_j \geq 0)$$

$$x_j \text{ livre} \Leftrightarrow x_j = x'_j - x''_j \quad \left( \begin{array}{l} x'_j = \text{Max}\{0; x_j\} \geq 0 \\ x''_j = \text{Max}\{0; -x_j\} \geq 0 \end{array} \right)$$

19



## Complementos de PL

### Definições

Dado um PL na forma aumentada com  $m$  equações e  $\ell$  variáveis

Igualar a zero  $\ell - m$  **variáveis não básicas (VNB)**. Se for possível resolver, de forma única, o sistema de equações lineares em relação às restantes  $m$  variáveis - **variáveis básicas (VB)**

→ **Solução básica (SB)**.

**Solução básica admissível (SBA)** - SB em que todas as variáveis respeitam as restrições de sinal. Caso contrário, é uma **solução básica não admissível (SBNA)**.

1 SBA → 1 ponto extremo da RA

1 ponto extremo da RA → pelo menos uma SBA

**Soluções básicas adjacentes** - apenas uma VB diferente ( $\mathbb{R}^2$  - extremos do segmento de reta)

20

## Dualidade



PRIMAL	DUAL
Maximizar (Max Z)	Minimizar (Min W)
1 restrição	1 variável de decisão
$i$ -ésima restrição de tipo " $\leq$ "	$y_i \geq 0$
$i$ -ésima restrição de tipo " $\geq$ "	$y_i \leq 0$
$i$ -ésima restrição de tipo " $=$ "	$y_i$ livre
Tl: $b_i; i=1, \dots, m$	FO: $W = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$
FO: $Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$	Tl: $c_j; j=1, \dots, n$
1 variável de decisão	1 restrição
$x_j \geq 0$	$j$ -ésima restrição de tipo " $\geq$ "
$x_j \leq 0$	$j$ -ésima restrição de tipo " $\leq$ "
$x_j$ livre	$j$ -ésima restrição de tipo " $=$ "
matriz de coeficientes técnicos: A	matriz de coeficientes técnicos: $A^T$

22

## Dualidade



(P) Min Z  $\Leftrightarrow$  (D) Max W

**Restrição** primal de tipo " $\geq$ "  $\Leftrightarrow$  variável dual  $\geq 0$ ;

**Restrição** primal de tipo " $\leq$ "  $\Leftrightarrow$  variável dual  $\leq 0$ ;


**Variável** primal  $\geq 0$   $\Leftrightarrow$  restrição dual de tipo " $\leq$ ";

**Variável** primal  $\leq 0$   $\Leftrightarrow$  restrição dual de tipo " $\geq$ ".

O  **$i$ -ésimo preço-sombra** (valor ótimo de  $y_i$ ) representa a proporção de variação no valor ótimo do primal em função do acréscimo no  $i$ -ésimo termo independente.

23

Instituto Superior de Economia e Gestão  
 UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



## Dualidade

### Propriedades


**Propriedade 6:** O dual do dual é o primal.

**Propriedade 7:** Dado um par de problemas duais, se uma SA do problema de maximização,  $x'$ , tem valor  $Z'$  e uma SA do problema de minimização,  $y'$ , tem valor  $W'$ , então  $Z' \leq W'$ .

Se  $Z' = W'$ , então  $x'$  e  $y'$  são soluções ótimas dos respetivos problemas.

24

Instituto Superior de Economia e Gestão  
 UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



## Dualidade

DUAL \ PRIMAL	Tem SA	Não tem SA
Tem SA	Os dois problemas têm SO e $Z^* = W^*$	Primal impossível Dual ilimitado
Não tem SA	Primal ilimitado Dual impossível	Primal impossível Dual impossível


**Soluções complementares** – verificam as **relações de desvios complementares**

Problema (P1)	Dual de (P1)
---------------	--------------

- i) variável de decisão VB ( $\neq 0$ )  $\Rightarrow$  restrição saturada (variável desvio = 0; VNB)
- ii) restrição não saturada (variável desvio é VB)  $\Rightarrow$  variável de decisão = 0 (VNB)

25

Instituto Superior de Economia e Gestão  
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



## Dualidade

**Determinação da SOD:**  $y_i = \Delta Z$  se  $\Delta b_i = +1$


Resolvido o Primal:

- **Gráfico** – calcular  $y_i$ : resolver o novo PL alterando  $\Delta b_i = +1$ . Calcular:  $\Delta Z = y_i$ .
- **Relações de complementaridade:** Identificar o valor das VNB (=0) do dual (D), tendo em conta as VB do (P), e resolver o sistema de equações (forma aumentada) do (D).
- **Solver - Relatório de Sensibilidade** – Coluna “Shadow Price”

**Interpretação Económica!**

26

Instituto Superior de Economia e Gestão  
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



## Análise de Sensibilidade – TI

- A SO é sensível a alterações nos dados (parâmetros) do problema?

**Termo Independente:  $b_i$**

**IS** – intervalo de sensibilidade – intervalo de variações de um TI mantendo a **base ótima** (o {VNB} e o {VB})

Se  $\Delta b_i \in IS$ :

- mantem-se base ótima e os preços-sombra (SOD)
- Altera-se: SOP e  $Z^*$ , com  $\Delta Z = y_i \times \Delta b_i$

27



## Análise de Sensibilidade – Coeficientes FO

Coeficiente da FO:  $c_j$ 

**IS** – intervalo de sensibilidade – intervalo de variações de um  $c_j$  mantendo a  
**base ótima** (o {VNB} e o {VB})

Se  $\Delta c_j \in IS$ :

- mantem-se Base ótima e SOP
- Altera-se: SOD e  $Z^*$ , com  $\Delta Z = x_j \times \Delta c_j$ .

**Restrição Adicional & Nova Variável**