

Sistemas de Apoio à Decisão

aula 2

Cap. 1




Instituto Superior
de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
DESDE 1911

Complementos de PL

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Definições

Forma aumentada de um PL – PL com:

todas as variáveis são não negativas e
todas as restrições funcionais estão expressas por equações

↑ + variáveis não negativas

variáveis auxiliares ou variáveis desvio ou variáveis de folga

Solução aumentada - uma solução do problema na forma aumentada.

Propriedades

Propriedade 5: Qualquer problema de PL pode ser escrito como um problema de PL equivalente na forma aumentada de maximização.

18



Complementos de PL

Passagem de modelos de PL à forma aumentada de maximização

Objetivo: $\text{Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \Leftrightarrow \text{Max}(-Z) = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$ (Min $Z = -\text{Max}(-Z)$)

Restrições:

$$“\leq” : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \wedge x_{n+i} \geq 0$$

$$“\geq” : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \wedge x_{n+i} \geq 0$$

Variáveis:

$$x_j \leq 0 \Leftrightarrow x_j = -x'_j (x'_j \geq 0)$$

$$x_j \text{ livre} \Leftrightarrow x_j = x'_j - x''_j \quad \left(\begin{array}{l} x'_j = \text{Max}\{0; x_j\} \geq 0 \\ x''_j = \text{Max}\{0; -x_j\} \geq 0 \end{array} \right)$$

19



Complementos de PL

Definições

Dado um PL na forma aumentada com m equações e ℓ variáveis

Igualar a zero $\ell - m$ **variáveis não básicas (VNB)**. Se for possível resolver, de forma única, o sistema de equações lineares em relação às restantes m variáveis - **variáveis básicas (VB)**

→ **Solução básica (SB)**.

Solução básica admissível (SBA) - SB em que todas as variáveis respeitam as restrições de sinal. Caso contrário, é uma **solução básica não admissível (SBNA)**.

1 SBA → 1 ponto extremo da RA

1 ponto extremo da RA → pelo menos uma SBA

Soluções básicas adjacentes - apenas uma VB diferente (\mathbb{R}^2 - extremos do segmento de reta)

20

Dualidade



PRIMAL	DUAL
Maximizar (Max Z)	Minimizar (Min W)
1 restrição	1 variável de decisão
i -ésima restrição de tipo " \leq "	$y_i \geq 0$
i -ésima restrição de tipo " \geq "	$y_i \leq 0$
i -ésima restrição de tipo " $=$ "	y_i livre
Tl: $b_i; i=1, \dots, m$	FO: $W = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$
FO: $Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$	Tl: $c_j; j=1, \dots, n$
1 variável de decisão	1 restrição
$x_j \geq 0$	j -ésima restrição de tipo " \geq "
$x_j \leq 0$	j -ésima restrição de tipo " \leq "
x_j livre	j -ésima restrição de tipo " $=$ "
matriz de coeficientes técnicos: A	matriz de coeficientes técnicos: A^T

22

Dualidade

(P) Min Z \Leftrightarrow (D) Max WRestrição primal de tipo " \geq " \Leftrightarrow variável dual ≥ 0 ;Restrição primal de tipo " \leq " \Leftrightarrow variável dual ≤ 0 ;Variável primal ≥ 0 \Leftrightarrow restrição dual de tipo " \leq ";Variável primal ≤ 0 \Leftrightarrow restrição dual de tipo " \geq ".

O i -ésimo preço-sombra (valor ótimo de y_i) representa a proporção de variação no valor ótimo do primal em função do acréscimo no i -ésimo termo independente.

23

Instituto Superior de Economia e Gestão
 UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Dualidade

Propriedades

Propriedade 6: O dual do dual é o primal.

Propriedade 7: Dado um par de problemas duais, se uma SA do problema de maximização, x' , tem valor Z' e uma SA do problema de minimização, y' , tem valor W' , então $Z' \leq W'$.

Se $Z' = W'$, então x' e y' são soluções ótimas dos respetivos problemas.

24

Instituto Superior de Economia e Gestão
 UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Dualidade

DUAL \ PRIMAL	Tem SA	Não tem SA
Tem SA	Os dois problemas têm SO e $Z^* = W^*$	Primal impossível Dual ilimitado
Não tem SA	Primal ilimitado Dual impossível	Primal impossível Dual impossível

Soluções complementares – verificam as **relações de desvios complementares**

Problema (P1)	Dual de (P1)
---------------	--------------

- i) variável de decisão VB ($\neq 0$) \Rightarrow restrição saturada (variável desvio = 0; VNB)
- ii) restrição não saturada (variável desvio é VB) \Rightarrow variável de decisão = 0 (VNB)

25

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Dualidade

Determinação da SOD: $y_i = \Delta Z$ se $\Delta b_i = +1$

Resolvido o Primal:

- **Gráfico** – calcular y_i : resolver o novo PL alterando $\Delta b_i = +1$. Calcular: $\Delta Z = y_i$.
- **Relações de complementaridade:** Identificar o valor das VNB (=0) do dual (D), tendo em conta as VB do (P), e resolver o sistema de equações (forma aumentada) do (D).
- **Solver - Relatório de Sensibilidade** – Coluna “Shadow Price”

Interpretação Económica!

26

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Análise de Sensibilidade – TI

- A SO é sensível a alterações nos dados (parâmetros) do problema?

Termo Independente: b_i

IS – intervalo de sensibilidade – intervalo de variações de um TI mantendo a **base ótima** (o {VNB} e o {VB})

Se $\Delta b_i \in IS$:

- mantem-se base ótima e os preços-sombra (SOD)
- Altera-se: SOP e Z^* , com $\Delta Z = y_i \times \Delta b_i$

27



Análise de Sensibilidade – Coeficientes FO

Coeficiente da FO: c_j

IS – intervalo de sensibilidade – intervalo de variações de um c_j mantendo a
base ótima (o {VNB} e o {VB})

Se $\Delta c_j \in IS$:

- mantem-se Base ótima e SOP
- Altera-se: SOD e Z^* , com $\Delta Z = x_j \times \Delta c_j$.

Restrição Adicional & Nova Variável