Mestrado em Matemática Financeira

Cálculo Estocástico

Exame - Época Normal

Duração: 2 horas

4 de Junho de 2012

1. Considere um movimento Browniano $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$.

(a) Será que o processo X definido por

$$X_t = B_t^3 - (3t+1)\,B_t$$

é uma martingala relativamente à filtração gerada pelo movimento Browniano? Em caso afirmativo, prove que é uma martingala. Em caso negativo, justifique.

(b) Seja $Y_t = \exp\left(\frac{1}{2}t\right)\cos(B_t)$. Mostre que

$$Y_t = \mathbb{E}[Y_t] + \int_0^t u_s dB_s,$$

para um certo processo u. Determine o processo u e determine $\mathbb{E}[\cos(B_t)]$.

2. Considere o movimento Browniano $d-$dimensional $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$ com $B_t = \left(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \ldots, B_t^{(d)}\right) \in \mathbb{R}^d$. Defina o processo

$$Y_t = 2\exp\left(\sum_{i=1}^d X_t^{(i)}\right),$$

onde $X_t^{(i)} := k_i t + c_i B_t^{(i)}$ e $k_1, k_2, \ldots, k_d$, $c_1, c_2, \ldots, c_d$ são constantes. Mostre que $Y_t = C + R\int_0^t Y_s ds + \int_0^t Y_s\,(\mathbf{u}\cdot dB)$, onde C, R e $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_d)$ são constantes e $\cdot$ representa o produto escalar. Determine estas constantes e determine qual a relação entre $k_1, k_2, \ldots, k_d$ e $c_1, c_2, \ldots, c_d$ de forma a que o processo Y seja uma martingala.

3. Considere o movimento Browniano $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$

Seja $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ o processo estocástico que satisfaz $X_0 = 0$ e a E. D. E.

$$dX_t = \sqrt{\left(a + X_t^2\right)}dB_t \quad \text{com } a > 0.$$

(a) Será que existe uma única solução forte para este problema de valor inicial? Justifique e em caso afirmativo, calcule a variância de X_t.

(b) Seja $f(u,t) = \mathbb{E}\left[e^{uX_t}\right]$ a função geradora de momentos de X_t. Mostre que $f(u,t)$ satisfaz a E. D. P. (equação diferencial parcial) de 2^a ordem

$$\frac{\partial f(u,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}u^2\left(\frac{\partial^2 f(u,t)}{\partial u^2} + af(u,t)\right).$$

Assuma que os integrais estocásticos indefinidos são martingalas e que $\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 f(u,t)}{\partial^2 u}\right] = \frac{\partial^2}{\partial^2 u}\mathbb{E}[f(u,t)]$.

4. Considere o problema de valores na fronteira no domínio $[0,T]\times\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+5x\frac{\partial F}{\partial x}+8x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=x^2F(t,x)\,,\qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}$$
$$F(T,x)=\ln(1+x^n)\,,\quad \text{com } n\geq 2 \text{ par.}$$

Determine uma representação estocástica para a solução deste problema, especifique qual o operador infinitesimal da difusão associada, determine explicitamente este processo de difusão e represente a solução da E.D.P.

5. Considere o modelo de Black-Scholes constituído por um activo com risco S_t e um activo sem risco (por exemplo, conta bancária) B_t. Os activos S_t e B_t têm dinâmicas dadas, respectivamente, pelas EDE's

$$dS_t=\mu\,S_t\,dt+\sigma\,S_t\,d\overline{W}_t\qquad\text{e}\qquad dB_t=r\,B_t\,dt,\ \text{com } B_0=1,$$

onde $\overline{W}$ é um movimento Browniano e $t\in[0,T]$.

(a) Determine o diferencial estocástico dX_t do processo $X_t:=\ln\left(S_t^k\right)+tS_t^n$ (com $0\leq t\leq T$) sob a medida $\mathbb{Q}$ (medida equivalente de martingala), considerando que $n,k\geq 2$ e determine a relação entre o movimento Browniano sob a medida $\mathbb{Q}$ e o movimento Browniano $\overline{W}$ (que é um movimento Browniano sob a medida $\mathbb{P}$).

(b) Determine o preço (na ausência de arbitragem) do direito contingente com payoff $\chi=\Phi(S_T)=\max\left\{C-\ln\left(S_T^k\right),0\right\}$ num instante t tal que $0\leq t<T$, onde C é uma constante positiva (preço de exercício). Nota: não calcule explicitamente o preço, represente-o apenas como um integral sobre a densidade da distribuição normal conveniente.

6. Seja $B=\{B_t,t\geq 0\}$ um movimento Browniano. Considere a E. D. E.

$$\begin{aligned}dX_t&=b(t,X_t)\,dt+\sigma(t,X_t)\,dB_t,\\ X_0&=Y\end{aligned}$$

onde Y é uma variável aleatória. Defina-se a sucessão $Z_t^{(n)}$ por recorrência, com $Z_t^{(0)}=X_0$ e

$$Z_t^{(n+1)}=Y+\int_0^t b\left(s,Z_s^{(n)}\right)ds+\int_0^t\sigma\left(s,Z_s^{(n)}\right)dB_s,\quad \text{com } j=1,2,....$$

Assuma que

$$\mathbb{E}\left[\left|Z_t^{(n+1)}-Z_t^{(n)}\right|^2\right]\leq\frac{C^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Prove que a sucessão $\left\{Z_t^{(n)}\right\}$ converge em média quadrática (i.e., em $L^2(\mathbb{P})$) para um limite X_t, quando $n\to\infty$ e que tem uma subsucessão que converge pontualmente quase certamente (isto é, $Z_t^{(n_k)}(\omega)\to X_t(\omega)$ para quase todo o $\omega\in\Omega$)

Sugestão: pode começar por provar que a sucessão $\left\{Z_t^{(n)}\right\}$ é uma sucessão de Cauchy em $L^2(\mathbb{P})$.

Cotações: 1(a):2, (b):2, 2:2.25, 3(a):2.25, (b)2.5, 4:2.25, 5(a):2.25, (b):2.25, 6:2.25