Mestrado em Matemática Financeira

Equações Diferenciais e Cálculo Estocástico
Exame - Época Normal

Duração: 2 horas e 30 minutos

30 de Maio de 2011

1. Considere um movimento Browniano $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$.

(a) Mostre que o processo X definido por

$$X_t = t^2 B_t - 2\int_0^t sB_s \mathrm{ds}$$

é uma martingala relativamente à filtração gerada pelo movimento Browniano.

(b) Será que existem processos estocásticos Y_t adaptados à filtração gerada pelo movimento Browniano e tais que $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_0] \quad \forall t \geq 0$ e que não sejam martingalas? Em caso afirmativo, dê um exemplo concreto de um desses processos e mostre que não é martingala.

2. Sejam $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ e $Y = \{Y_t, t \in [0,T]\}$ dois processos estocásticos adaptados á filtração gerada pelo movimento Browniano $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$, progressivamente mensuráveis e tais que $\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2 dt\right] < \infty$, $\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_t^2 dt\right] < \infty$.

(a) Mostre que

$$\operatorname{cov}\left(\int_0^T X_t dB_t, \int_0^T Y_t dB_t\right) = \int_0^T \mathbb{E}[X_t Y_t]\, dt.$$

(Sugestão: talvez seja útil usar a identidade $ab = \frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2$).

(b) Se $f(t)$ for uma função determinística, com $f \in L^2[0,T]$, e se $Y_t = \int_0^t f(s)\, dB_s$, mostre que

$$\operatorname{cov}(Y_t, Y_{t+u}) = \int_0^t f(s)^2\, ds \qquad \forall u \geq 0.$$

3. Considere o movimento Browniano $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$

(a) Seja $U = \{U_t, t \in [0,T]\}$ o processo estocástico definido por

$$U_t = e^{B_t}\left(1 + t^2\right).$$

Defina $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ como o processo com diferencial

$$dX_t = \frac{dU_t}{U_t}$$

e tal que $X_0 = 1$. Determine explicitamente o processo X.

(b) Considere a Equação diferencial estocástica (EDE)

$$dX_t = \ln\left(1 + X_t^2\right) dt + \sin(X_t) dB_t.$$
$$X_0 = \sqrt{2}.$$

Mostre que existe uma única solução (forte) para esta EDE.

4. Considere o problema de valores iniciais

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= ku + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) &= f(x), \end{aligned}$$

onde $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ e k é uma constante.

Determine uma representação estocástica para a solução deste problema, especifique qual o operador infinitesimal da difusão associada e mostre que a solução pode ser representada por

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi t}} e^{kt} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{8t}\right) dy.$$

5. Considere o modelo de Black-Scholes constituído por um activo com risco S_t e um activo sem risco (exemplo conta bancária) B_t. Os activos S_t e B_t têm dinâmicas dadas, respectivamente, pelas EDE's

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t \quad \text{e} \quad dB_t = r\, B_t\, dt, \text{ com } B_0 = 1,$$

onde $\overline{W}$ é um movimento Browniano. Considere um direito contingente (derivado) da forma $\chi = \Phi(S_T) = \left(\frac{S_T}{S_{T_0}}\right)^\beta$ onde $\beta > 2$ e T_0 é um instante tal que $T_0 < T$.

(a) Determine as equações diferenciais estocásticas satisfeitas pelos processos S_t e $Y_t := \left(\frac{S_t}{S_{T_0}}\right)^\beta$ (com $T_0 < t < T$) sob a medida Q (medida equivalente de martingala) e especifique a densidade associada à mudança de medida de P para Q.

(b) Determine o preço (na ausência de arbitragem) do direito contingente $\chi = \Phi(S_T) =. \left(\frac{S_T}{S_{T_0}}\right)^\beta$ num instante t tal que $T_0 < t < T$.

6. Seja $B = \{B_t, t \geq 0\}$ um movimento Browniano. Considere uma sucessão de processos $u^n = \{u_t^n, t \in [0,T],\ n \in \mathbb{N}\}$ que pertencem a $L^1_{a,T}$. Suponha ainda que a sucessão $\int_0^T (u_s^n - u_s)^2\, ds$ converge para 0 em probabilidade quando $n \to \infty$, com $u \in L^1_{a,T}$.

Mostre que então a sucessão de integrais estocásticos $\int_0^T u_s^n dB_s$ converge para $\int_0^T u_s dB_s$ em probabilidade quando $n \to \infty$.

Sugestões:

1) Recorde que uma sucessão de variáveis aleatórias X_n converge para uma variável aleatória X em probabilidade se para qualquer $\varepsilon > 0$ temos que $P[|X_n - X| > \varepsilon] \to 0$ quando $n \to \infty$.

2) Use o resultado: se $v \in L^1_{a,T}$ então

$$P\left[\left|\int_0^T v_s dB_s\right| > k\right] \leq \frac{r}{k^2} + P\left[\int_0^T v_s^2 ds \geq r\right]$$

para qualquer $r \in \mathbb{Q}^+$ (conjunto dos números racionais positivos).