



### Instruções

1. Verifique que o seu telemóvel está **desligado**. Ter o telemóvel ligado durante a prova é **motivo para anulação** da mesma.
2. Durante o decorrer da prova não serão prestados esclarecimentos. Se tiver alguma dúvida apresente-a por escrito.
3. **Formalize e fundamente as suas respostas**. Nomeadamente, refira, sempre que necessário, a estatística de teste e a sua distribuição. Se nada for dito em contrário utilize uma dimensão de 5% nos testes estatísticos que efectuar.

1. Pretende-se estudar a “performance” de activos financeiros segundo o risco. Para isso foram recolhidas amostras casuais de activos nas categorias de risco baixo e de risco elevado e observado o seu retorno percentual no período de um ano. Os dados estão resumidos abaixo:

	Média	Desvio padrão corrigido	Dimensão da amostra
Risco baixo	3.52	1.02	153
Risco elevado	7.01	2.93	231

- a) Construa um intervalo de confiança a 95% para o retorno médio dos activos de risco elevado.
  - b) Existe a convicção entre os analistas financeiros que os activos de risco baixo têm um retorno médio de 3%. Através da realização de um teste adequado, avalie se existe evidência estatística que contrarie esta convicção.
  - c) Os mesmos analistas supõem que o retorno médio dos activos de risco elevado excede o dos activos de risco baixo em pelo menos 4 pontos percentuais. Confirme ou infirme a suposição realizando o teste de hipóteses conveniente (admita que as amostras são independentes).
2. Num estudo complementar, procura-se avaliar a associação entre o perfil de risco dos investidores e o seu nível de rendimento (anual, em milhares de euros). Para isso, foi recolhida aleatoriamente uma amostra de investidores com os resultados abaixo:

Perfil \ Rendimento	Até 30	Mais de 30
	Conservador	20
Moderado	20	40
Agressivo	40	60

Avalie, através da realização do teste apropriado, se o perfil do investidor e o nível de rendimento estão associados.

3. Considere a função massa de probabilidade  $f_X$

$$f_X(x|p) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1}, & x = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases},$$

onde  $0 < p < 1$  é uma constante.

Deduza o estimador de máxima verosimilhança do parâmetro  $p$ .

4. Foi extraída uma amostra de 200 famílias de Chicago para investigar qual a distância que as famílias americanas tendem a percorrer quando vão de férias. Foi considerado o modelo

$$\text{MILES} = \beta_0 + \beta_1 \text{INCOME} + \beta_2 \text{AGE} + \beta_3 \text{KIDS} + u,$$

onde

MILES: milhas percorridas em férias por ano

INCOME: rendimento anual do agregado familiar em US\$1000

AGE: idade média dos adultos no agregado familiar

KIDS: número de crianças no agregado familiar

O resultado da estimação OLS do modelo encontra-se sob **Equação 1** no anexo.

- a) Teste a significância estatística global do modelo.
- b) Interprete  $\hat{\beta}_2$  e teste a significância estatística do correspondente regressor AGE.
- c) Teste a hipótese  $\beta_1 \geq \beta_2$  contra a hipótese  $\beta_1 < \beta_2$ .
- d) Com vista à detecção de heterocedasticidade, considerou-se a equação

$$\begin{aligned} \hat{u}_i^2 = & \delta_0 + \delta_1 \text{INCOME}_i + \delta_2 \text{AGE}_i + \delta_3 \text{KIDS}_i + \delta_4 \text{INCOME}_i^2 + \delta_5 \text{AGE}_i^2 + \delta_6 \text{KIDS}_i^2 \\ & + \delta_7 \text{INCOME} * \text{AGE}_i + \delta_8 \text{INCOME} * \text{KIDS}_i + \delta_9 \text{AGE} * \text{KIDS}_i + e_i \end{aligned}$$

cuja estimação OLS se encontra sob **Equação 2** no anexo.

- d1) Indique as hipóteses nula e alternativa do teste relevante, assim como a estatística de teste, e conclua.
- d2) Admita que há evidência de heterocedasticidade. Quais as consequências na estimação OLS dos coeficientes do modelo e erros padrão?
- e) Sob **Equação 3** no anexo encontram-se os resultados da estimação OLS da equação

$$\text{MILES}_i = \alpha_0 + \alpha_1 \text{INCOME}_i + \alpha_2 \text{AGE}_i + \alpha_3 \text{KIDS}_i + \delta_1 \text{FITTED}_i^2 + \delta_2 \text{FITTED}_i^3 + v_i,$$

onde  $\text{FITTED}_i = \widehat{\text{MILES}}_i$ .

Explique qual a finalidade desta regressão relativamente ao modelo em estudo e proceda ao teste relevante.

5. Considere o modelo de regressão linear simples

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e o estimador de  $\beta$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Determine o enviesamento e a variância de  $\hat{\beta}$ .

Questão	1a	1b	1c	2	3	4a	4b	4c	4d1	4d2	4e	5
Cotação	15	15	20	20	20	10	15	15	20	10	20	20

## ANEXO

### EQUAÇÃO 1

Dependent Variable: MILES

Included observations: 200

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-391.5480	169.7752	-2.306273	0.0221
INCOME	14.20133	1.800256	7.888506	0.0000
AGE	15.74092	3.757370	4.189346	0.0000
KIDS	-81.82642	27.12960	-3.016131	0.0029
R-squared	0.340605	Mean dependent var		1054.230
Adjusted R-squared	0.330512	S.D. dependent var		552.7990
S.E. of regression	452.3125	Akaike info criterion		15.08642
Sum squared resid	40098973	Schwarz criterion		15.15239
Log likelihood	-1504.642	Hannan-Quinn criter.		15.11312
F-statistic	33.74740	Durbin-Watson stat		1.948060
Prob(F-statistic)	0.000000			

### Coefficient Covariance Matrix

	C	INCOME	AGE	KIDS
C	28823.62	-142.6730	-446.6777	233.4264
INCOME	-142.6730	3.240923	-1.543798	0.843166
AGE	-446.6777	-1.543798	14.11783	-34.93170
KIDS	233.4264	0.843166	-34.93170	736.0150

### EQUAÇÃO 2

Dependent Variable: RESIDUAL<sup>2</sup>

Included observations: 200

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-630678.4	523380.4	-1.205010	0.2297
INCOME	21644.67	7831.167	2.763914	0.0063
AGE	1529.975	25030.70	0.061124	0.9513
KIDS	81985.66	119500.9	0.686067	0.4935
INCOME <sup>2</sup>	-44.32885	50.26254	-0.881946	0.3789
AGE <sup>2</sup>	220.7181	329.2774	0.670310	0.5035
KIDS <sup>2</sup>	14459.40	15165.47	0.953442	0.3416
INCOME*AGE	-315.0473	131.5589	-2.394724	0.0176
INCOME*KIDS	2101.332	923.2261	2.276076	0.0240
AGE*KIDS	-5269.675	2702.375	-1.950016	0.0526
R-squared	0.199964	Mean dependent var		200494.9
Adjusted R-squared	0.162068	S.D. dependent var		318053.0
S.E. of regression	291141.3	Akaike info criterion		28.04971
Sum squared resid	1.61E + 13	Schwarz criterion		28.21463
Log likelihood	-2794.971	Hannan-Quinn criter.		28.11645
F-statistic	5.276598	Durbin-Watson stat		2.052532
Prob(F-statistic)	0.000002			

### EQUAÇÃO 3

Dependent Variable: MILES

Included observations: 200

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1360.553	1187.171	-1.146047	0.2532
INCOME	34.97383	24.03814	1.454931	0.1473
AGE	39.06872	26.89428	1.452678	0.1479
KIDS	-199.6796	138.5500	-1.441210	0.1511
FITTED <sup>2</sup>	-0.001634	0.001720	-0.950078	0.3433
FITTED <sup>3</sup>	5.49E - 07	5.50E - 07	0.998163	0.3194
R-squared	0.344206	Mean dependent var		1054.230
Adjusted R-squared	0.327304	S.D. dependent var		552.7990
S.E. of regression	453.3948	Akaike info criterion		15.10094
Sum squared resid	39879974	Schwarz criterion		15.19989
Log likelihood	-1504.094	Hannan-Quinn criter.		15.14099
F-statistic	20.36495	Durbin-Watson stat		1.952065
Prob(F-statistic)	0.000000			