Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
Análise Matemática 2

Época Normal 11/01/2013

Parte I

1. Determine, em função dos parâmetros $\alpha, \beta > 0$, a natureza da série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n^\beta}{1 + n^\alpha},$$

esclarecendo quando é divergente, absolutamente convergente ou simplesmente convergente.

2. Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ em série de potências de x, indicando o maior intervalo aberto onde tal desenvolvimento é válido. Aproveite o resultado para calcular $f^{(12)}(0)$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\arcsin\left(\sqrt{4 - x^2 - y^2}\right)}{\log(xy)}.$$

Determine geométrica e analiticamente o domínio de f, bem como o seu interior e fronteira. Dê exemplos de: i) Uma sucessão de termos no exterior de D_f, convergente para um ponto de D_f; ii) Uma sucessão de termos em $ext(D_f)$ que não seja limitada; iii) Um subconjunto de D_f que seja aberto.

4. Sem usar a definição de limite segundo Heine, mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $(x_n) \subset \mathbb{R}^n$ é uma sucessão convergente para $a \in \mathbb{R}^n$ então a sucessão $f(x_n)$ é convergente em $\mathbb{R}$ e tem limite $f(a)$.

5. Discuta a existência do limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^6 + 2y^3}.$$

Parte II

1. Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,x^2+y^2>0\\ \\ 0 & ,x^2+y^2\leq 0\end{cases}$$

a) Mostre que f admite derivadas parciais na origem e calcule o seu valor.

b) Discuta a diferenciabilidade de f na origem.

2. Seja $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Mostre que nesse caso se tem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)f.$$

3. Determine os extremantes locais de $f(x,y)=x-2y+\log(x^2+y^2)$ e discuta a possibilidade de existência de maximizantes globais.

4. Considere a região do plano complexo definida por $\Omega=\{\omega\in\mathbb{C}:0\leq\arg(\omega)\leq\frac{\pi}{4}\}$, assim como a sua imagem, Ω^*, através da função $f(z)=z^2$. Represente graficamente a região Ω^* e discuta a injectividade desta transformação de Ω em Ω^*.

5. Calcule:
i) $\dfrac{(1+\sqrt{3})^{10}}{1+i}$ ii) e^{2i+1} iii) $\log_0(2+2i)$

6. Determine o maior subconjunto de $\mathbb{C}$ onde a função $f(z)=z^2|z|^2$ é holomorfa e calcule $f'(z)$ nesses pontos.