Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

ANÁLISE MATEMÁTICA 2

Época de Recurso 28/01/2013

Parte I

1. Estude a natureza das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^\alpha}{\ln(2^n)+e^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{5^n}{(2n)^n}.$

2. Determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde está bem definida a função

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{2n+1}{(n+1)^5} x^{2n}.$$

Indique também os desenvolvimentos em série de potências para $f'(x)$ e para a primitiva de f que se anula na origem.

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\log\left(1-\sqrt{4-x^2-y^2}\right)}{x+y+1}.$$

Determine geométrica e analiticamente o domínio de f, bem como o seu interior e fronteira. Mostre que D_f é um conjunto aberto e indique o menor subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ que contém D_f.

4. Mostre que, dado um qualquer conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se tem $front(A) = front(A^C)$.

5. Discuta a existência do limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x^2-y)^2}.$$

Parte II

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & , x+y>0 \\ \\ x+y & , x+y \leq 0 \leq 0 \end{cases}$$

a) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

b) Determine, caso existam, as derivadas de f segundo o vector $(1,1)$, nos pontos $(1,1)$ e $(1,-1)$.

2. Sabendo que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável no ponto $(0,e,0)$, cuja matriz Jacobiana é dada nesse ponto por $[e \ \ -1 \ e]$, mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = 0,$$

em que $g(x,y) = f(\sin(xy^2), e^y, \log(1+x^2))$.

3. Determine os extremantes locais de $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, definida no conjunto $\Omega = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$, e discuta a possibilidade de existência de extremantes globais.

4. Considere a região do plano complexo definida por

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} \leq \arg(\omega) \leq \frac{\pi}{2}, |\omega| \leq \sqrt[3]{2}\},$$

assim como a sua imagem, Ω^*, através da função $f(z) = 1 + z^3$. Represente graficamente as regiões Ω e Ω^*.

5. Determine todos os valores de x e y que satisfazem:

i) $x + iy = xe^{iy}$ ii) $\dfrac{1+i}{1-i} = xe^{iy}$

6. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa no conjunto Ω. Mostre que a função $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ é holomorfa no conjunto $\Omega^* = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$.