

# Programação Matemática - 2013/2014

## Programação por Metas

**Exercício 1** *Resolva o seguinte problema de otimização por metas:*

$$\begin{aligned} \min Z &= \{s_1^+; s_2^-; s_3^- + s_3^+\} \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 &+ s_1^- - s_1^+ &= 20 \\ 4x_1 - x_2 &+ s_2^- - s_2^+ &= 40 \\ 2x_1 + x_2 &+ s_3^- - s_3^+ &= 40 \\ x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

**Exercício 2** *Considere o seguinte problema de otimização por metas:*

$$\begin{aligned} \min Z &= P_1 s_1^- + P_2 s_2^+ + P_3 s_3^- + P_4 (s_4^+ + s_4^-) \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 & & \leq 200 \\ 8x_1 + 5x_2 &+ s_1^- - s_1^+ &= 400 \\ x_1 - x_2 &+ s_2^- - s_2^+ &= 10 \\ x_2 &+ s_3^- - s_3^+ &= 140 \\ x_1 &+ s_4^- - s_4^+ &= 40 \\ x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+, s_4^-, s_4^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva o problema.

b) Indique uma alteração das metas que dê origem a soluções alternativas. Justifique.

**Exercício 3** *Determine o conjunto ideal do seguinte problema de otimização por metas e resolva-o:*

$$\begin{aligned} \min Z &= \{s_1^-; s_2^-\} \\ \text{s.a} \quad x_1 & & \leq 60 \\ x_1 - x_2 & & \geq 0 \\ 6x_1 + 9x_2 & & \leq 540 \\ x_2 &+ s_1^- - s_1^+ &= 30 \\ x_1 &+ s_2^- - s_2^+ &= 40 \\ x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

**Exercício 4** Uma empresa dispõe de  $5 \times 10^5$  u.m. para gastar na campanha publicitária de lançamento de um novo produto. Pretende usar na campanha cartazes e spots televisivos sobre os quais tem a seguinte informação:

	custos (u.m.)	impacto (nº de pessoas)
spots (20 sg)	$4 \times 10^3$	$8 \times 10^4$
cartazes	20	1500

A empresa pretende (por ordem decrescente de importância):

- não exceder o orçamento
- editar pelo menos 20,000 cartazes
- atingir com os spots televisivos pelo menos 1 milhão e 500 mil potenciais clientes

a) Proponha uma campanha publicitária. Justifique.

b) Nas condições pretendidas, qual é o número máximo de potenciais compradores que é possível atingir com cada veículo publicitário? Justifique.

**Exercício 5** Resolva o seguinte problema de optimização por metas:

$$\begin{aligned}
 \min Z &= P_1 s_1^- + P_2 s_2^- + P_3 s_3^- \\
 \text{s.a} \quad & \begin{array}{rccccccc}
 & & x_2 & & +s_1^- - s_1^+ & & & = & 5 \\
 & -x_1 & -x_2 & & & & +s_2^- - s_2^+ & & = & 4 \\
 & & & x_3 & & & & +s_3^- - s_3^+ & = & 3 \\
 & & & & x_2 & & & & \leq & 2 \\
 & & & & & x_3 & & & \leq & 3 \\
 & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+ \geq 0
 \end{array}
 \end{aligned}$$

**Exercício 6** Considere o seguinte problema de optimização por metas:

$$\begin{aligned}
 \min Z &= P_1 s_1^- + P_2 (s_2^- + s_2^+) + P_3 s_3^- \\
 \text{s.a} \quad & \begin{array}{rccccccc}
 & x_1 - x_2 & & +s_1^- - s_1^+ & & & & = & 0 \\
 & 3x_1 + 5x_2 & & & & +s_2^- - s_2^+ & & = & 15 \\
 & x_1 & & & & & +s_3^- - s_3^+ & = & 4 \\
 & & & & & & & & & x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+ \geq 0
 \end{array}
 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Resolva-o pelo método de simplex.

**Exercício 7** *Uma fábrica de pequena dimensão localizada no norte do país produz conservas de peixe que vende no mercado interno e externo. Actualmente, o mercado interno, que está limitado a lojas gourmet, absorve apenas 5% da produção total anual. Como, ao contrário de outros, o sector da indústria conserveira nacional se encontra em crescimento, a administração pretende aumentar os níveis de produção da fábrica no próximo ano. A fábrica produz actualmente 50 mil latas de sardinha e 30 mil latas de atum por ano. A conserva de sardinha é vendida ao preço médio de 4 e 5 euros a lata no mercado interno e externo, respectivamente. A receita média da conserva de atum é de 2 e 3 euros a lata no mercado interno e externo, respectivamente. Para estabelecer o plano de produção para o próximo ano, a administração da fábrica estabeleceu as seguintes metas, por ordem decrescente de importância:*

1. Aumentar a receita total anual em pelo menos 10%.
2. Limitar a produção anual de conserva de sardinha e de atum a 55 mil e 35 mil latas, respectivamente.
3. Aumentar a produção anual em pelo menos 2 mil latas para o mercado interno e não permitir um aumento de produção anual para o mercado externo de mais de mil latas.

Formalize, como um problema de optimização por metas, o problema cuja solução permitirá à administração da fábrica estabelecer o plano de produção para o próximo ano, indicando o significado de todas as variáveis e funções que utilizar.

**Exercício 8** *Uma empresa vai iniciar a produção de dois novos componentes electrónicos, C1 e C2. Numa fase inicial, serão disponibilizadas 40 horas semanais de mão-de-obra para produzir os novos componentes, sendo que, em média, a produção unitária dos componentes requer uma hora de mão-de-obra. Estima-se que as vendas semanais não ultrapassem as 24 unidades do componente C1 e as 30 unidades do componente C2 tendo os lucros unitários de C1 e C2 sido estimados em 80 e 40 u.m., respectivamente.*

Foram estabelecidos os seguintes objectivos, por ordem decrescente de importância:

1. Evitar a subutilização da capacidade produtiva.
2. Produzir o maior número possível de componentes, de acordo com a contribuição para o lucro de cada componente.
3. Evitar a contratação de mão-de-obra adicional.

Formalize, como um problema de optimização por metas, o problema cuja solução permitirá estabelecer um plano de produção dos novos componentes. Indique o significado de todas as variáveis e funções que utilizar.

**Exercício 9** *Uma empresa de refrigerantes vai instalar uma unidade fabril em Angola. Actualmente a fábrica, localizada em Portugal, produz 75 milhões de litros de refrigerante por ano, dos quais 70% são vendidos em Portugal, sendo o restante exportado. Angola absorve 40% das exportações. O refrigerante é vendido em recipientes com capacidade para 0,33 litros: garrafas de vidro ou plástico e latas. Em média o enchimento de 250 garrafas consome uma unidade energética. Uma unidade energética é também necessária para encher 350 latas. Para a produção anual na unidade fabril de Angola, a empresa estabeleceu os seguintes objectivos, por ordem decrescente de prioridade:*

1. Produzir pelo menos 50% da quantidade procurada e não ter excedente no fim do ano.
2. O rácio de produção de refrigerante em latas para garrafas de vidro ser pelo menos de 2 para 1.
3. Não ultrapassar as 30 mil unidades de consumo energético.

Formalize, como um problema de optimização por metas, o problema cuja solução permitirá planejar a produção de refrigerantes na unidade fabril de Angola. Indique o significado de todas as variáveis e funções que utilizar.

**Exercício 10** *O proprietário de uma cadeia de livrarias acaba de receber de uma editora uma remessa de 5000 livros infantis. Dessa remessa, 100 livros serão oferecidos aos filhos dos funcionários das livrarias e pelo menos 2000 serão colocados à venda em quatro lojas, das quais duas estão localizadas em centros comerciais. Os restantes livros serão oferecidos a uma instituição de solidariedade social. O proprietário da cadeia de livrarias pretende, por ordem decrescente de prioridade:*

1. Colocar à venda nas lojas localizadas em centros comerciais pelo menos 70% do número total de livros a comercializar;
2. Colocar à venda pelo menos 500 livros em cada loja localizada fora de um centro comercial;
3. Colocar à venda igual número de livros nas lojas localizadas em centros comerciais;
4. Por cada 100 livros colocados numa loja oferecer pelo menos 2 livros à instituição de solidariedade social.

Formalize, como um problema de optimização por metas, o problema cuja solução permitirá ao proprietário da cadeia de livrarias tomar uma decisão sobre a colocação dos livros nas lojas.