

Distribuições

Tópicos de Estatística

José Passos

ISEG-UTL

29 de Outubro de 2011

- Prova de Bernoulli é uma experiência com apenas dois resultados: sucesso e insucesso.
- Uma v.a. tem distribuição de Bernoulli de parâmetro p se esta assumir apenas dois valores, sucesso e insucesso, ou 1 e 0, com probabilidade p e $1 - p$ respectivamente:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

- Se a v.a. X tem distribuição de Bernoulli a função de probabilidade tem a expressão,

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad x = 0 \text{ ou } x = 1, \quad 0 < p < 1.$$

- Momentos:

$$E(X) = 1p + 0(1 - p) = p \quad (1)$$

$$\text{Var}(X) = p(1 - p)^2 + (0 - p)^2(1 - p) = p(1 - p) \quad (2)$$

$$M(t) = (1 - p) + pe^t. \quad (3)$$

- Vamos observar o valor da v.a. X , sucesso ou insucesso, numa sequência de n provas de Bernoulli independentes, cada uma com probabilidade de sucesso p , e registamos o valor da sua soma, Y , i. é., o número total de sucessos.
- Seja y o número de sucessos em n provas independentes. Qualquer sequência de valores de X com soma y em n provas tem probabilidade,

$$P(Y = y) = p^y(1 - p)^{n-y}, \quad y = 0, 1, 2, \dots, n, \quad 0 < p < 1,$$

- como há

$$\binom{n}{y} = \frac{n!}{(n-y)!y!}$$

sequências destas, tem-se

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} p^y(1 - p)^{n-y}, \quad y = 0, 1, 2, \dots, n, \quad 0 < p < 1.$$

- Momentos:

$$E(Y) = np \quad (4)$$

$$E(Y^2) = n(n-1)p^2 + np \quad (5)$$

$$\text{Var}(Y) = np(1-p) \quad (6)$$

$$M(t) = (1 - p + pe^t)^n. \quad (7)$$

- Notas:

- Se $X \sim B(n, p)$ e $Y \sim B(m, p)$ são independentes então $X + Y \sim B(n + m, p)$
- se n é grande, a binomial pode ser aproximada de forma razoável pela normal
- se n é grande, e com $\lambda = np$, a distribuição $Po(\lambda)$ pode ser utilizada como uma aproximação à $B(n, p)$

- Quando se fixa o número de provas de Bernoulli n , o número de sucessos é uma Binomial.
- Quando se fixa o número de sucessos r , e se considera o número de provas que têm de realizar-se até se obterem r sucessos, então o número de provas é uma v.a., $X \sim NB(r, p)$, que assume valores da sucessão $r, r + 1, r + 2, \dots$, com função probabilidade,

$$P(X = x) = \binom{x-1}{x-r} p^r (1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, r+2, \dots, \quad 0 < p < 1.$$

- O acontecimento $X = x$ só pode ocorrer se houver exactamente $r - 1$ sucessos nas $x - 1$ primeiras provas e 1 sucesso na x -ésima prova.

- Fazendo a mudança de variável $Y = X - r$, onde Y representa o n^o de insucessos antes de r -ésimo sucesso, temos,

$$P(Y = y) = \binom{y + r - 1}{y} p^r (1-p)^y, \quad y = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1.$$

Binomial negativa (cont)

- Momentos (Y):

$$E(Y) = r(1 - p)/p$$

$$\text{Var}(Y) = r(1 - p)/p^2$$

$$M(t) = p^r(1 - (1 - p)e^t)^{-r}, \quad t < -\log(1 - p)$$

- Momentos (X):

$$E(X) = r/p$$

$$\text{Var}(X) = r(1 - p)/p^2$$

$$M(t) = (pe^t)^r(1 - (1 - p)e^t)^{-r}, \quad t < -\log(1 - p)$$

reparametrizando a binomial negativa em termos da média, $\mu = r(1 - p)/p$, tem-se,

$$E(Y) = \mu$$

$$\text{Var}(Y) = \mu + \mu^2/r$$

- A distribuição geométrica é uma distribuição discreta, e pode ser vista como a probabilidade de a primeira ocorrência de um sucesso acontecer ao fim de x provas de Bernoulli, cada uma com probabilidade de sucesso p .
- Pode ser vista como a distribuição do tempo de espera por 1 sucesso.
- É um caso particular da binomial negativa com $r = 1$.
- Uma v.a. X tem distribuição geométrica, se a f.p. se puder escrever como,

$$P(X = x) = p(1 - p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad 0 < p < 1$$

- Momentos:

$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$M(t) = \frac{p}{1 - (1-p)e^t}, \quad t < -\log(1-p)$$

- A distribuição multinomial generaliza a binomial.
- Se X_1, X_2, \dots, X_k são acontecimentos mutuamente exclusivos com $P(X_1) = p_1, \dots, P(X_k) = p_k$ então a probabilidade de em n provas X_1 ocorrer x_1 vezes, ..., X_k ocorrer x_k vezes, é dada por,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k},$$
$$x_i \geq 0, \sum x_i = n, \sum p_i = 1$$

- Momentos:

$$E(X_i) = np_i$$

$$E(X_i^2) = n(n-1)p_i^2 + np_i$$

$$E(X_i X_j) = n(n-1)p_i p_j$$

$$\text{Var}(X_i) = np_i(1-p_i)$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$$

- A distribuição de Poisson é uma distribuição discreta que expressa a probabilidade de ocorrência de um número de acontecimentos em determinado período de tempo fixo.
- Se o valor esperado das ocorrências no intervalo de tempo fixo é λ a probabilidade de haver exactamente x ocorrências é dada por,

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0.$$

- Momentos:

$$E(X) = \lambda$$

$$E(X^2) = \lambda(\lambda + 1)$$

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

$$M(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

- Notas:

- Se $X \sim Po(\lambda)$ e $Y \sim Po(\theta)$ são independentes então $X + Y \sim Po(\lambda + \theta)$
- Se $X \sim Po(\lambda)$ e $(Y | X = x) \sim B(x, p)$ então $Y \sim Po(\lambda p)$
- A binomial converge para a Poisson quando $n \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$, mantendo-se constante np .

- A distribuição uniforme é uma distribuição contínua com dois parâmetros definida num intervalo $[a, b]$.
- Uma v.a. X tem distribuição uniforme, $X \sim U(a, b)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b].$$

- Momentos:

$$E(X) = (a + b)/2$$

$$E(X^2) = (a^2 + ab + b^2)/3$$

$$\text{Var}(X) = (b - a)^2/12$$

$$M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b - a)}, \quad t \neq 0.$$

Como $M(t)$ e as suas derivadas não estão definidas em $t = 0$, os momentos de ordem $k = 1, 2, \dots$ obtêm-se calculando $\lim_{t \rightarrow 0} M^{(k)}(t)$

- Notas:

- Com $a = 0$ e $b = 1$ tem-se a uniforme standard, $U(0, 1)$
- Se $X \sim U(0, 1)$ então também $Y = 1 - X \sim U(0, 1)$
- Se $X \sim U(0, 1)$ então $Y = -(1/\lambda) \log X \sim Ex(\lambda)$
- A soma de duas variáveis independentes e com a mesma distribuição uniforme é uma variável com distribuição triangular.

- A distribuição normal é uma distribuição contínua, definida em \mathfrak{R} , com dois parâmetros e pode ser utilizada para modelar uma grande variedade de fenómenos.
- Uma v.a. X tem distribuição normal, $X \sim N(\mu, \sigma)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \mu \in \mathfrak{R}, \sigma > 0.$$

- Momentos:

$$E(X) = \mu$$

$$E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

$$E(X^3) = \mu^3 + 3\mu\sigma^2$$

$$E[(X - \mu)^2] = \text{Var}(X) = \sigma^2$$

$$E[(X - \mu)^3] = 0$$

$$M(t) = \exp \{ \mu t + (1/2)\sigma^2 t^2 \}.$$

- Notas:

- Para n grande a $B(n, p)$ é aproximadamente $N(np, np(1 - p))$
- Para λ grande a $Po(\lambda)$ é aproximadamente $N(\lambda, \lambda)$
- Para ν grande a $t(\nu)$ é aproximadamente $N(0, 1)$
- Para ν grande a $\chi^2_{(\nu)}$ é aproximadamente $N(\nu, 2\nu)$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma)$ e $a, b \in \mathfrak{R}$ então $(aX + b) \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$
- A soma (ou combinações lineares) de v.a.s independentes com distribuição normal é ainda normal. O inverso também é verdadeiro.
- Se X_1, \dots, X_n são v.a.s independentes com distribuição normal standard, então $\sum_i^n X_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$
- A média amostral, \bar{X}_n , de uma qualquer população onde existe média e variância, é uma v.a. que converge em distribuição para a normal, quando $n \rightarrow \infty$.

- A distribuição exponencial é uma distribuição contínua, definida em \mathfrak{R}^+ , com um parâmetro e pode ser utilizada para modelar tempos de espera.
- Uma v.a. X tem distribuição exponencial, $X \sim Ex(\delta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \delta e^{-\delta x}, \quad x > 0, \quad \delta > 0.$$

- Momentos:

$$E(X) = 1/\delta$$

$$E(X^2) = 2/\delta^2$$

$$\text{Var}(X) = 1/\delta^2$$

$$M(t) = \delta/(\delta - t), \quad t < \delta$$

- Notas:

- Se X é uma exponencial tem-se

$$P(X > t + s \mid X > s) = P(X > t), \forall t, s \geq 0$$

- Se $X_i \sim \text{Ex}(\delta)$, $i = 1, 2, \dots, n$, então $\sum X_i \sim G(n, \delta)$
- Se $X \sim \text{Ex}(\delta)$ e $k > 0$, então $kX \sim \text{Ex}(\delta/k)$
- Se $X_i \sim \text{Ex}(\delta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, então $\min X_i \sim \text{Ex}(\sum \delta_i)$

- A distribuição gama é uma distribuição contínua, definida em \mathbb{R}^+ , com dois parâmetros e pode ser utilizada para modelar tempos de espera, i.é., tempo até a ocorrência de determinado acontecimento.
- Uma v.a. X tem distribuição gama, $X \sim G(\alpha, \delta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\delta}, \quad x > 0, \alpha > 0, \delta > 0.$$

- $\Gamma(\alpha)$ é a função gama, definida por,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx.$$

- $\Gamma(\alpha)$ verifica a relação, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$

- Uma parametrização habitual consiste em fazer $\beta = 1/\delta$, parâmetro de escala,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

- Momentos (na parametrização α, δ):

$$E(X) = \alpha/\delta$$

$$E(X^2) = \alpha(1 + \alpha)/\delta^2$$

$$\text{Var}(X) = \alpha/\delta^2$$

$$M(t) = (1 - (1/\delta)t)^{-\alpha}, \quad t < \delta$$

- Notas:

- Se $X_i \sim G(\alpha_i, \delta)$, $i = 1, 2, \dots, n$, então $\sum X_i \sim G(\sum \alpha_i, \delta)$
- Se $\alpha = 1$, então $X \sim Ex(\delta)$
- Se $X_i \sim Ex(\delta)$, $i = 1, 2, \dots, n$, então $\sum X_i \sim G(n, \delta)$
- Se $\alpha = n/2$ e $\delta = 1/2$, então $X \sim \chi^2_{(n)}$
- Se $X \sim G(\alpha, \delta)$, então $2\delta X \sim \chi^2_{(2\alpha)}$
- Se $X \sim N(\mu, \sigma)$, então $(1/2)(X - \mu)^2/\sigma^2 \sim G(1/2, 1)$

- A distribuição Weibull é uma distribuição contínua definida em \mathfrak{R}^+ e é usualmente utilizada em problemas de fiabilidade (sobrevivência).
- Uma v.a. X tem distribuição Weibull com 3 parâmetros, $X \sim W(\alpha, \beta, \theta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \alpha\beta(x - \theta)^{\beta-1}e^{-\alpha(x-\theta)^\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \theta \geq 0.$$

- A Weibull com 2 parâmetros, quando ($\theta = 0$), é mais usual, $X \sim W(\alpha, \beta)$, com f.d.p.,

$$f(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

- Momentos (com $\theta = 0$):

$$E(X) = \frac{\Gamma(1 + 1/\beta)}{\alpha^{1/\beta}}$$

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(1 + k/\beta)}{\alpha^{k/\beta}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\alpha^{2/\beta}} [\Gamma(1 + 2/\beta) - \Gamma^2(1 + 1/\beta)]$$

- Notas:

- Se $\beta = 1$ e $\theta = 0$, então $X \sim \text{Ex}(\alpha)$

- A distribuição beta standard é uma distribuição contínua com dois parâmetros, definida no intervalo $[0, 1]$ e é usualmente utilizada em estatística bayesiana para modelar proporções.
- Uma v.a. X tem distribuição Beta, $X \sim B(\alpha, \beta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{1}{Be(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

- $Be(\alpha, \beta)$ é a função beta, definida por

$$Be(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

- $Be(\alpha, \beta)$ verifica a relação $Be(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta)$

- Momentos:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

$$M(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha + r}{\alpha + \beta + r} \right) \frac{t^k}{k!}$$

- Notas:

- Se $X \sim G(\alpha, \theta)$ e $Z \sim G(\beta, \theta)$ independentes, então $X/(X + Z) \sim B(\alpha, \beta)$
- Se $X \sim \chi^2_{(n_1)}$ e $Z \sim \chi^2_{(n_2)}$ independentes, então $X/(X + Z) \sim B(n_1/2, n_2/2)$
- Com $\alpha = \delta = 1$ tem-se $X \sim B(1, 1) \equiv U(0, 1)$

- A distribuição Dirichlet de ordem $k \geq 2$ é uma distribuição contínua multivariada com k parâmetros, definida no simplex aberto de dimensão $k - 1$. É a generalização multivariada da distribuição Beta.
- Uma v.a. X_1, \dots, X_k tem distribuição Dirichlet, $X \sim D(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, se a f.d.p. conjunta se escrever como,

$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{Be(\alpha)} \prod_i^k x_i^{\alpha_i - 1}, \quad x_i > 0, \quad \sum_i^k x_i = 1, \quad \alpha_i > 0.$$

- $Be(\alpha)$ é a função beta, definida por

$$Be(\alpha) = \frac{\prod_i^k \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\sum_i^k \alpha_i)}.$$

- Momentos:

$$E(X_i) = \frac{\alpha_i}{\sum_i^k \alpha_i}$$

$$\text{Var}(X_i) = \frac{\alpha_i(\sum_i^k \alpha_i - \alpha_i)}{(\sum_i^k \alpha_i)^2(\sum_i^k \alpha_i + 1)}$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{-\alpha_i\alpha_j}{(\sum_i^k \alpha_i)^2(\sum_i^k \alpha_i + 1)}$$

- A distribuição gama inversa é uma distribuição contínua com dois parâmetros e é comum em estatística bayesiana.
- Uma v.a. X tem distribuição gama inversa, $X \sim GI(\alpha, \delta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} e^{-\delta/x}, \quad x > 0, \alpha > 0, \delta > 0.$$

- Momentos:

$$E(X) = \frac{\delta}{\alpha - 1}, \alpha > 1$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\delta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \alpha > 2$$

- Notas:

- A distribuição gama inversa obtém-se a partir da gama fazendo a mudança de variável $X = 1/Y$ onde $Y \sim G(\alpha, \delta)$
- Se $\alpha = n/2$ e $\delta = 1/2$, então $X \sim Gl(n/2, 1/2) \equiv \chi_{(n)}^{-2}$ (Qui-quadrado invertida)
- Se $X \sim Gl(n/2, 1/2) \equiv \chi_{(n)}^{-2}$, então $Y = \sqrt{X} \sim \chi_{(n)}^{-1}$ (Qui invertida)

Normal gama inversa

- A distribuição normal gama inversa é uma distribuição contínua com quatro parâmetros e é comum em estatística bayesiana.
- Uma v.a. (X, Y) tem distribuição normal gama inversa, $X \sim NGI(\mu, \nu, \alpha, \delta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x, y) = \frac{\delta^\alpha (2\pi/\nu)^{-1/2}}{\Gamma(\alpha)} y^{-(\alpha+3/2)} \exp \left\{ -\frac{1}{y} \left[\delta + \frac{\nu}{2} (x - \mu)^2 \right] \right\}.$$

- Factorizando a densidade conjunta de (X, Y) no produto da condicional de $(X | y)$ pela marginal de Y , obtém-se

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = (2\pi y/\nu)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{\nu}{2y} (x - \mu)^2 \right\} \times \\ \times \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-(\alpha+1)} \exp \left\{ -\frac{\delta}{y} \right\}.$$

Normal gama inversa (cont)

- onde $(X|y) \sim N(\mu, y/\nu)$ e $Y \sim GI(\alpha, \beta)$
- Momentos:

$$E(X|y) = \mu$$

$$\text{Var}(X|y) = y/\nu$$

$$E(Y) = \frac{\delta}{\alpha - 1}$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{\delta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$$

- A distribuição logística é uma distribuição contínua, definida em \mathfrak{R} e é usualmente utilizada em econometria para modelar variáveis categóricas (regressão logística).
- Uma v.a. X tem distribuição logística, $X \sim L(\mu, s)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{e^{-(x-\mu)/s}}{s(1 + e^{-(x-\mu)/s})^2}, \quad x \in \mathfrak{R}, \quad \mu \in \mathfrak{R}, \quad s > 0.$$

- Momentos:

$$E(X) = \mu$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\pi^2}{3} s^2$$

$$M(t) = e^{\mu t} \Gamma(1 - st) \Gamma(1 + st), \quad |st| < 1.$$

- Notas:

- Se $X \sim U(0, 1)$ então $\mu + \beta(\log(X) - \log(1 - X)) \sim L(\mu, \beta)$
- Se $X \sim Ex(1)$ então $\mu - \beta \log \frac{e^{-X}}{1 - e^{-X}} \sim L(\mu, \beta)$

- A distribuição log-logística é uma distribuição contínua, definida em \mathfrak{R}^+ e é usualmente utilizada em análise de sobrevivência (em economia é também conhecida por distribuição Fisk).
- Uma v.a. X tem distribuição log-logística, $X \sim LL(\alpha, \beta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{(\beta/\alpha)(x/\alpha)^{\beta-1}}{[1 + (x/\alpha)^\beta]^2}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

- Momentos:

$$E(X) = \alpha \frac{\pi/\beta}{\sin(\pi/\beta)}, \beta > 1$$

$$E(X^k) = \alpha^k \frac{k\pi/\beta}{\sin(k\pi/\beta)}, \beta > 1$$

$$\text{Var}(X) = \alpha^2 \left(\frac{2\pi/\beta}{\sin(2\pi/\beta)} - \frac{\pi^2/\beta^2}{\sin^2(\pi/\beta)} \right)$$

- Notas:

- A log-logística é a distribuição de probabilidade de uma v.a. cujo logaritmo tem distribuição logística.
- Se $X \sim LL(\alpha, \beta)$ então $Y = \log X \sim L(\log \alpha, 1/\beta)$
- Se $X \sim LL(\alpha, \beta)$ então quando $\beta \rightarrow \infty$, $LL(\alpha, \beta) \rightarrow L(\alpha, \alpha/\beta)$

- A distribuição log-normal é uma distribuição contínua, definida em \mathfrak{R}^+ .
- Uma v.a. X tem distribuição log-normal, $X \sim LN(\mu, \sigma)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = x^{-1}(2\pi\sigma^2)^{-1/2}e^{-(\log x - \mu)^2/2\sigma^2}, \mu \in \mathfrak{R}, \sigma > 0$$

- Momentos:

$$E(X) = \exp\{\mu + \sigma^2/2\}$$

$$E(X^k) = \exp\{k\mu + k^2\sigma^2/2\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{Var}(X) = (\exp\{\sigma^2\} - 1) \exp\{2\mu + \sigma^2\}.$$

- Notas:
 - A log-normal é a distribuição de probabilidade de uma v.a. cujo logaritmo tem distribuição normal.

- A distribuição Cauchy é uma distribuição contínua, definida em \mathfrak{R} .
- Uma v.a. X tem distribuição Cauchy, $X \sim C(\mu, \beta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\beta}{(x - \mu)^2 + \beta^2}, \mu \in \mathfrak{R}, \beta > 0$$

- Esta distribuição não tem momentos.
- A distribuição Cauchy standard, $C(0, 1)$, pode-se obter como o rácio de duas distribuições normais standard, independentes.

- A distribuição Pareto é uma distribuição contínua com dois parâmetros, (θ, α) , definida em $[\theta, +\infty)$.
- Uma v.a. X tem distribuição Pareto, $X \sim Pa(\theta, \alpha)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x > \theta, \quad \theta > 0, \quad \alpha > 0$$

- Esta distribuição foi definida por Vilfredo Pareto para estudar a repartição da riqueza entre os indivíduos pois descreve relativamente bem a ideia de uma grande parcela da riqueza estar apropriada por uma parcela pequena da população.

- Momentos:

$$E(X) = \frac{\alpha\theta}{\alpha - 1}, \alpha > 1$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha\theta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \alpha > 2.$$

- A distribuição Laplace é uma distribuição contínua, definida em \mathfrak{R} .
- Uma v.a. X tem distribuição Laplace, $X \sim La(\mu, \sigma)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} \exp \left\{ -\frac{|x - \mu|}{\sigma} \right\}, \mu \in \mathfrak{R}, \sigma > 0$$

- Momentos:

$$E(X) = \mu$$

$$\text{Var}(X) = 2\sigma^2$$

$$M(t) = \frac{\exp(\mu t)}{1 - \sigma^2 t^2}, |t| < 1/\sigma.$$

- Notas:
 - Se $X \sim La(0, \sigma)$ então $|X| \sim Ex(1/\sigma)$
 - Se X e Y são v.a.s independentes com distribuição $Ex(1/\sigma)$ então $(X - Y) \sim La(0, \sigma)$
 - Se X e Y são v.a.s independentes com distribuição $U(0, 1)$ então $\log(X/Y) \sim La(0, 1)$

- Johnson; Kotz; Balakrishnan (1995), *Continuous Univariate Distributions*, Volume 2, 2nd Edition, Wiley-Interscience.
- Johnson; Kotz; Balakrishnan (1994), *Continuous Univariate Distributions*, Volume 1, 2nd Edition, Wiley-Interscience.
- Johnson; Kemp; Kotz (2005), *Univariate Discrete Distributions*, 3rd Edition, Wiley-Interscience.