**PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA 2013-2014**

**Programação Linear Inteira**

**1**. O responsável por um empreendimento de exploração de gás natural, deve escolher entre 10 possíveis locais de exploração, os cinco de menor custo total. Os custos de exploração são $c_1, c_2, ..., c_{10}$. A escolha dos locais 1 e 7 impede a escolha do local 8. A escolha dos locais 3 ou 4 impede o acesso ao local 5. Apenas dois dos locais 5, 6, 7, e 8 podem ser escolhidos. Apresente uma formalização para o problema do responsável do empreendimento, explicando cuidadosamente o significado das variáveis de decisão e das restrições.

**2**. Um fabricante de têxteis está a planear uma produção de toalhas de praia para vender antes do início do verão. As toalhas serão produzidas em lotes de 50 unidades. O fabricante já decidiu que irá produzir dois tipos de toalhas: lisas e de riscas. As toalhas lisas poderão ser amarelas ou verdes. As de riscas poderão ter riscas azuis ou encarnadas. O fabricante decidiu não produzir mais de 100 lotes de toalhas lisas e já tem uma encomenda de 40 lotes de toalhas amarelas. Decidiu também que, havendo produção de toalhas de riscas, serão produzidos pelo menos 10 lotes. Se forem produzidos os dois tipos de toalhas, lisas e de riscas, será necessário proceder à limpeza de uma das máquinas utilizadas. Essa limpeza demora meia hora e custa 60 u.m.. O fabricante dispõe de 150 horas de mão-de-obra para produzir as toalhas.

A receita unitária, o custo por lote de toalhas e o tempo de mão-de-obra necessário para produzir um lote de toalhas são apresentados na tabela seguinte.

| Toalha | Receita por toalha (u.m.) | Custo por lote (u.m.) | Mão-de-obra necessária por lote (horas) |
|---|---|---|---|
| Lisa amarela | 10 | 300 | 1.25 |
| Lisa verde | 12 | 410 | 1.00 |
| Riscas azuis | 14 | 450 | 2.00 |
| Riscas encarnadas | 13 | 440 | 1.50 |

Apresente uma formalização que permita ao fabricante adoptar o plano de produção de toalhas de praia de forma a maximizar o lucro total. Explique cuidadosamente o significado de todas as variáveis de decisão e das funções que utilizar.

**3**. Uma fábrica concluiu a produção de uma encomenda cujo transporte para os clientes será feito dentro de um mês. Devido à escassez de espaço na fábrica, serão arrendados armazéns para guardar o produto até à data do seu transporte para dois clientes, C1 e C2, que encomendaram 200 e 600 unidades do produto, respectivamente. Estão disponíveis, para arrendamento, três armazéns, A1, A2 e A3 que têm espaço para armazenar 450, 400 e 500 unidades do produto, respectivamente. A renda mensal dos armazéns A1 e A2 é de 250 € e de 225 €, respectivamente. A renda mensal do armazém A3 é de 235 € se não forem armazenadas mais de 350 unidades do produto. Se a quantidade armazenada exceder as 350 unidades o valor da renda é de 275 €. Na decisão a tomar há ainda que considerar os custos unitários de transporte dos armazéns para os clientes, que se encontram na tabela abaixo, em euros.

| | C1 | C2 |
|---|---|---|
| A1 | 5 | 2 |
| A2 | 7 | 4 |
| A3 | 3 | 6 |

Formalize, em programação linear inteira, o problema da determinação do armazenamento óptimo do produto.

**4**. Para prestar cuidados de saúde a adolescentes grávidas, residentes em seis concelhos (C1,…,C6), serão abertas unidades especiais de obstetrícia nos hospitais da região. O acompanhamento de uma grávida adolescente requer, em média, 7 deslocações à unidade de obstetrícia em que estiver inscrita. O número de adolescentes do sexo feminino e a taxa anual de gravidez entre as adolescentes em cada concelho são os seguintes:

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de adolescentes | 760 | 810 | 780 | 820 | 840 | 850 |
| Taxa de gravidez | 0.010 | 0.015 | 0.036 | 0.025 | 0.042 | 0.020 |

As unidades serão abertas nos hospitais da região e o orçamento disponível é apenas de 3000 *u.m.*. Os custos de abertura de uma unidade de obstetrícia nos 4 hospitais e os tempos médios de cada deslocação em função do concelho de residência da grávida e do hospital são:

| Hospitais | Tempo médio de deslocação (em minutos) | | | | | | Custo de abertura (*u.m.*) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | |
| H1 | 4 | 14 | 12 | 8 | 10 | 6 | 900 |
| H2 | 11 | 13 | 3 | 6 | 11 | 10 | 1000 |
| H3 | 9 | 20 | 13 | 5 | 8 | 7 | 1100 |
| H4 | 15 | 6 | 11 | 10 | 12 | 19 | 800 |

Pretende-se saber em que hospitais devem ser abertas as unidades e como deve ser feita a inscrição das grávidas de forma a prestar-lhes o melhor serviço possível, sem exceder o orçamento disponível. Formalize este problema em programação linear inteira.

**5**. Resolva os seguintes problemas de PLI usando um algoritmo de tipo *branch and bound*:

a) min $Z = -x_1 - x_2$

s.a $4x_1 - 2x_2 \geq 1$

$4x_1 + 2x_2 \leq 11$

$x_2 \geq \frac{1}{2}$

$x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros

b) max $Z = 2x_1 + x_2$

s.a $5x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$x_2 \geq 0$

$x_1 \geq 0$ e inteiro

**6**. Considere o seguinte problema de PLI.

min $Z = 2x_1 + 7x_2 + 4x_3$

s.a $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7$

$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 9$

$x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$

a) Escreva a relaxação linear do problema.

b) Mostre que, se o valor da variável $x_3$ for fixado em zero, a relaxação linear do problema tem uma única solução admissível. Explicite essa solução.

c) Sabendo que a solução óptima da relaxação linear do problema é $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/2$, resolva-o por um algoritmo de *branch and bound*. Indique as regras utilizadas.

**7**. Seja

$$\text{(D)} \quad \min \quad W = by + \sum_{j=1}^{n} z_j$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & a_j y + z_j \geq c_j \qquad j = 1,\dots,n \\ & y \geq 0 \\ & z_j \geq 0 \qquad j = 1,\dots,n \end{aligned}$$

com $b > 0$, $0 < a_j \leq b$, $c_j \geq 0$, $j = 1,\dots,n$ e $\dfrac{c_j}{a_j} \geq \dfrac{c_{j+1}}{a_{j+1}}$, $j = 1,\dots,n-1$.

a) Mostre que (D) é o dual da relaxação linear de um problema de saco mochila binário.

b) Seja $s \in \{2,\dots,n\}$ tal que $\sum_{j=1}^{s-1} a_j \leq b$ e $a_s \geq b - \sum_{j=1}^{s-1} a_j$. Mostre que:

b1) $\bar{y} = \dfrac{c_s}{a_s}$, $\bar{z}_j = \max\{0, c_j - a_j \bar{y}\}$, $j = 1,\dots,n$ é uma solução admissível de (D).

b2) $\bar{x}_j = 1, \quad j = 1,\dots,s-1$

$$\bar{x}_s = \frac{b - \sum_{j=1}^{s-1} a_j}{a_s}$$

$\bar{x}_j = 0, \quad j = s+1,\dots,n$

é uma solução óptima da relaxação linear do problema de saco mochila binário.

**8**. Considere o seguinte problema de PLI.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 10x_1 + 12x_2 + 16x_3 \\ \text{s.a} \quad & 22x_1 + 25x_2 + 32x_3 \leq 72 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

a) Determine um majorante do valor óptimo do problema. Justifique.
b) Determine um minorante do valor óptimo do problema. Justifique.
c) Resolva-o por um algoritmo de *branch and bound*. Indique as regras utilizadas.

**9**. Resolva o seguinte problema de PLI pelo método dos planos de corte:

Min $Z = 2x_1 - 4x_2$

s.a $2x_1 + x_2 \leq 5$

$-4x_1 + 4x_2 \leq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros

**10**. Considere o seguinte problema de PLI.

max $Z = 5x_1 + 2x_2$

s.a $2x_1 + 2x_2 \leq 9$

$3x_1 + x_2 \leq 11$

$x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros

a) Resolva a relaxação linear do problema.

b) Resolva o problema pelo método dos planos de corte escolhendo sempre a linha da função objectivo para gerar os cortes.

**11**. Considere o seguinte problema de PLI.

Max $Z = 3x_1 + 2x_2$

s.a $2x_1 + 5x_2 \leq 25$ [R1]

$5x_1 + 2x_2 \leq 25$ [R2]

$x_1 + x_2 \leq 6$ [R3]

$x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros

a) Escreva a relaxação linear do problema e resolva-a. O que pode afirmar sobre o valor óptimo do problema?

b) No quadro óptimo do simplex, relativo à resolução da relaxação linear do problema, os coeficientes associados à variável $x_2$ são

| | $x_1$ | $x_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | -1/3 | 5/3 |

sendo $s_3$, $s_4$ e $s_5$ as variáveis auxiliares associadas às restrições R1, R2 e R3, respectivamente. Deduza a expressão do corte de Gomory que se obtém a partir da linha de $x_2$.

c) Resolva graficamente o problema que resulta da introdução do corte gerado em b) na relaxação linear do problema de PLI e comente a solução obtida.

**12**. Considere o seguinte problema de PLI e o quadro final de simplex da sua relaxação linear:

max $\quad Z = 5x_1 + 6x_2$

s.a $\quad 4x_1 - 4x_2 \leq 5$

$\quad 2x_1 + 3x_2 \leq 15$

$\quad -x_1 + x_2 \leq 5$

$\quad x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros

| | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | solução |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | 0 | 3/20 | 11/5 | 0 | 135/4 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 3/20 | 1/5 | 0 | 15/4 |
| $x_2$ | 0 | 1 | -1/10 | 1/5 | 0 | 5/2 |
| $s_3$ | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 1 | 25/4 |

a) Deduza a expressão do corte de Gomory gerado com base na linha de $x_2$.

b) Os cortes de Gomory gerados com base nas linhas de $x_2$ e de $Z$ são equivalentes? Justifique.

c) Introduza o corte gerado em a) e reoptimize.

**13**. Considere o seguinte problema de programação linear inteira:

(P) Min $\quad Z = 2x_1 + 2x_2$

s.a $\quad 2x_1 + x_2 \geq 1$

$\quad x_1 + 2x_2 \geq 1$

$\quad x_1, x_2 \in \{0,1\}$

a) Resolva graficamente a relaxação linear de (P) e apresente um minorante do valor óptimo de (P).

b) A desigualdade $x_1 \geq 1$ é um corte?

c) Por um processo algébrico, deduza um corte a partir das restrições de (P).

**14**. Considere o seguinte problema de PLI.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & Z = 2x_1 - 10x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

A solução óptima da sua relaxação linear é: $x_1 = 3.5$ e $x_2 = 3.5$.

a) Determine um majorante e um minorante para o valor óptimo. Justifique.

b) Apresente a expressão de um corte. Justifique.

c) Determine a solução óptima usando um algoritmo de tipo *branch and bound*. Justifique as suas opções.

**15**. Considere o seguinte problema de PLI:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 3x_1 + 7x_2 \\ \text{s.a} & -2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

e o quadro óptimo da sua relaxação linear:

| | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | solução |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | 0 | 18/5 | 17/5 | 261/5 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 3/5 | 2/5 | 36/5 |
| $x_1$ | 1 | 0 | -1/5 | 1/5 | 3/5 |

a) Introduza o corte de Gomory gerado com base na linha de $x_2$ e reoptimize.

b) Determine a solução óptima usando um algoritmo de tipo *branch and bound*. (Sugestão: use na raiz da árvore de pesquisa o corte gerado na alínea anterior).

**16**. Considere o seguinte problema de programação linear inteira e o quadro de simplex correspondente à solução óptima da sua relaxação linear:

(P) max $Z = -x_1 + 12x_2$

s.a $-2x_1 + 5x_2 \leq 19$

$-x_1 + 8x_2 \leq 35$

$x_1 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros

| | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | solução |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | 0 | 0 | 3/2 | 1/2 | 54 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/8 | 1/8 | 19/4 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| $s_1$ | 0 | 0 | 1 | -5/8 | 11/8 | 5/4 |

a) Deduza a expressão do corte de Gomory gerado com base na linha de $s_1$.

b) Resolva o problema (P) por um algoritmo de *branch and bound*, utilizando a regra BUB.

Sugestão: resolva as relaxações lineares graficamente.

**17**. Considere o problema de caixeiro viajante cuja matriz de distâncias é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 12 & 8 \\ 9 & 0 & 15 & 11 \\ 14 & 15 & 0 & 10 \\ 13 & 16 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine um minorante do valor óptimo do problema. Justifique a escolha do método utilizado.

b) Determine um majorante do valor óptimo do problema e justifique a escolha do método utilizado. Use o resultado obtido em a) para avaliar o majorante obtido.

c) Resolva o problema por um algoritmo de *branch and bound*. Indique as regras utilizadas.

**18.** Considere o problema de caixeiro viajante cuja matriz de distâncias é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 11 & 6 \\ 9 & 0 & 13 & 8 \\ 16 & 17 & 0 & 9 \\ 13 & 16 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine um minorante do comprimento do circuito Hamiltoniano óptimo, através da resolução de uma relaxação do problema.

b) Determine o circuito Hamiltoniano gerado pela heurística do vizinho mais próximo escolhendo a cidade 3 no passo inicial da heurística.

c) Resolva o problema por um algoritmo de *branch and bound*. Indique as regras utilizadas.

d) Calcule o desvio percentual do minorante obtido em (a) relativamente ao comprimento do circuito Hamiltoniano óptimo

**19.** Considere o seguinte problema de programação linear inteira e o quadro de simplex correspondente à solução óptima da sua relaxação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = -x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 6x_3 \le 5 \\ & -3x_1 + x_2 - x_3 \le 3 \\ & x_1 + x_2 + 8x_3 \le 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | solução |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | -13/5 | 0 | -1/5 | 0 | -3/5 | -23/5 |
| $x_1$ | 1 | -3/5 | 0 | 4/5 | 0 | -3/5 | 2/5 |
| $s_5$ | 0 | -3/5 | 0 | 23/10 | 1 | -8/5 | 49/10 |
| $x_3$ | 0 | 1/5 | 1 | -1/10 | 0 | 1/5 | 7/10 |

a) Deduza a expressão do corte de Gomory gerado com base na linha de $Z$.

b) Resolva o problema por um algoritmo de *branch and bound*, fazendo a primeira ramificação com base na variável $x_3$. Sugestão: resolva as relaxações lineares graficamente.

**20.** Considere o seguinte problema de saco mochila binário:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 80x_1 + 187x_2 + 30x_3 + 84x_4 + 30x_5 \\ \text{s.a} \quad & 32x_1 + 85x_2 + 30x_3 + 28x_4 + 15x_5 \leq 83 \\ & x_j \in \{0,1\},\ j = 1,\dots,5 \end{aligned}$$

a) Resolva a relaxação linear do problema.

b) Resolva o problema por um algoritmo de *branch and bound*, adoptando a regra BUB.

c) Mostre que qualquer solução admissível do problema verifica a desigualdade $\sum_{j=1}^{4} x_j \leq 2$.