Lista de Exercícios sobre equações e sistemas de equações lineares e não lineares

1. (EN 2011/2012) Considere a equação não linear $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$.

   (a) Localize graficamente as soluções reais desta equação, determinando intervalos de comprimento não superior a 0.5 que as contenham.

   (b) Utilize o método da bisseção para calcular um valor aproximado da solução negativa da equação, com erro inferior a 0.5×10^{-4}, estimando previamente o número de iterações necessárias para atingir esse nível de precisão.

   (c) Utilize o método de Newton para determinar uma aproximação da maior solução positiva da equação, partindo da aproximação inicial $x_0 = 2.5$. Sabendo que a solução exacta é $z = 3$, diga quantas iterações são necessárias para atingir um erro inferior a 0.5×10^{-12}.

   (d) Considerando a função iteradora $g(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)/4$ no intervalo $[0, 1]$, mostre que a menor solução positiva da equação pode ser determinada usando o método do ponto fixo. Através desse método determine essa solução com erro inferior a 10^{-7}.

2. (Prova Modelo 2011/2012) Considere a equação não linear

$$x^4 + 0.55x - 1.55 = 0.$$

   (a) Localize graficamente as duas soluções reais desta equação, determinando intervalos de comprimento não superior a 0.5 que as contenham.

   (b) Utilize o método da bicessão para calcular um valor aproximado da solução negativa da equação, com erro inferior a 0.5×10^{-6}, estimando previamente o número de iterações necessárias para atingir esse nível de precisão.

   (c) Utilize o método de Newton para determinar uma aproximação da solução positiva da equação, partindo da aproximação inicial $x_0 = 2.0$. Sabendo que a solução exacta é $z = 1$, diga quantas iterações são necessárias para atingir um erro inferior a 0.5×10^{-12}.

   (d) Mostre que as soluções da equação dada são pontos fixos da função $g(x) = 2(1.55 - x^4)$, mas que o método do ponto fixo não converge para nenhuma das soluções.

3. (ER 2011 / 2012) Considere a equação não linear $e^x - 4x = 0$.

(a) Localize graficamente as soluções desta equação, determinando intervalos de comprimento não superior a 0.5 que as contenham.

(b) Utilize o método da bicessão para calcular um valor aproximado das soluções da equação, com erro inferior a 0.5×10^{-7}, estimando previamente o número de iterações necessárias para atingir esse nível de precisão.

(c) Utilize o método de Newton para determinar uma aproximação da maior solução da equação, com erro inferior a 0.5×10^{-12}. Mostre de modo experimental que existe $x^* \in \mathbb{R}$ tal que se a aproximação inicial x_0 for: i) inferior a x^*, o método de Newton converge para a menor raíz da equação; ii) se $x_0 > x^*$ o método de Newton converge para a maior raíz da equação.

(d) Considerando a função iteradora $g(x) = e^x/4$ no intervalo $[0, 1/2]$, mostre que a menor solução positiva da equação pode ser determinada usando o método do ponto fixo. Através desse método determine a solução com erro inferior a 0.5×10^{-6}. Poderá a mesma função iteradora ser usada no intervalo $[2, 3]$ para aproximar a maior solução da equação ? Em caso negativo, proponha outra função $g(x)$ que permita resolver o problema.

4. (EN 2011/2012) Considere o sistema linear, de 3 equações a 3 incógnitas, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

(a) Seja $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a solução do sistema se considerarmos um segundo membro $\tilde{\boldsymbol{b}} = (101, 1.1, 0.2)$. Calcule o número de condição da matriz A na norma $\|\cdot\|_\infty$ e, sem resolver o sistema, estime a percentagem de erro cometida ao usar $\tilde{\boldsymbol{b}}$ em vez de $\boldsymbol{b}$.

(b) Mostre que o método de Gauss-Seidel converge e utilize-o para calcular $\boldsymbol{x}$ e $\tilde{\boldsymbol{x}}$ com erro inferior a 0.5×10^{-8}. Calcule $\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty / \|\boldsymbol{x}\|_\infty$, compare com a estimativa obtida na alínea anterior e comente.

5. (ER 2011/2012) Considere o sistema linear, de 4 equações a 4 incógnitas, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Seja $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a solução do sistema se considerarmos um segundo membro $\tilde{\boldsymbol{b}} = (1, 1, 1, 1)$. Considerando $\alpha = 10$, calcule o número de condição da matriz A na norma $\|\cdot\|_\infty$ e, sem resolver o sistema, estime a percentagem de erro cometida ao usar $\tilde{\boldsymbol{b}}$ em vez de $\boldsymbol{b}$.

(b) Ainda com $\alpha = 10$, mostre que o método de Jacobi converge e utilize-o para calcular $\boldsymbol{x}$ com erro inferior a 0.5×10^{-6}.

(c) Para que valores de α é possível garantir a convergência do método de Jacobi? Será possível encontrar valores de α para os quais o método seja efectivamente divergente ? Quais ?

6. (Prova Modelo 2011 / 2012) Considere o sistema linear, de n equações a n incógnitas, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, em que a matriz A é tridiagonal, com a estrutura seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Suponha que em vez do vetor $\boldsymbol{b}$ dispomos apenas de uma sua aproximação, digamos $\tilde{\boldsymbol{b}}$, afetado de um erro não superior a 10%. Sabendo que $\|A^{-1}\|_\infty \leq 0.5$, discuta qual a da percentagem de erro que afectará a solução do sistema, mesmo que este seja resolvido de forma exata.

(b) Mostre que o método de Jacobi converge e, considerando $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1 \cdots 1)^T$, utilize-o para determinar a solução do sistema com erro inferior a 0.5×10^{-3}. (Se não conseguir determinar a priori o número de iterações a realizar, explicite pelo menos o critério de paragem utilizado)

7. Considere a equação $\sin x - e^{-x} = 0$.

(a) Prove que esta equação tem uma raíz $z \in [0.5, 0.7]$.

(b) Efectue uma iteração pelo método da bissecção e indique um novo intervalo que contenha z.

(c) determine o número m de iterações necessárias para garantir que $|z - x_m| < 10^{-6}$.

8. Pretende-se calcular a raíz cúbica de um número real $a > 0$. Para isso utilizou-se o método iterativo dado pela fórmula

$$x_{n+1} = \frac{2\,x_n^3 + a}{3\,x_n^2}$$

(a) Explique como foi obtida esta fórmula.

(b) Justifique que o método converge, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 > 0$. Para que valores de x_0 a convergência é monótona?

9. Seja $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

   (a) Prove que a equação $f(x) = 0$ não tem raízes negativas.

   (b) a equação $f(x) = 0$ tem apenas uma raíz real z no intervalo $[1.5\,,\,2]$. Utilize o método de Newton para obter uma aproximação da raíz.

10. Pretende-se determinar, usando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação

$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0$$

   (a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo $[2.6\,,\,3]$, estão asseguradas as condições de convergência do método.

   (b) Calcule a raíz referida com erro inferior a 10^{-6}.

11. Mostre que a equação

$$\ln x - (x-2)^2 = 0$$

   tem exactamente duas raízes reais distintas e indique, para cada uma delas, um intervalo (de comprimento não superior a 2) que a contenha (sem conter a outra). Se pretendesse utilizar o método de Newton para calcular a raíz mais pequena, diga, justificando, qual (ou quais) dos seguintes valores poderia usar como aproximação inicial: $x_0 = 2.1$; $x_0 = 2.5$; ou $x_0 = 1.4$?

12. Pretende-se resolver a equação

$$\sin x - x + 1 = 0$$

(a) Prove que esta esta equação tem uma e uma só solução $z > 0$.

(b) Mostre que a sucessão $x_{n+1} = \sin x_n + 1$ converge para a raíz z, qualquer que seja $x_0 \in [\frac{\pi}{2}, 2]$.

(c) Partindo da aproximação inicial $x_0 = 2$, calcule x_2 e determine um majorante para o erro $|z - x_2|$.

(d) Estime teoricamente o número de iterações necessárias para obter uma aproximação com erro inferior a 10^{-8}. Determine uma aproximação x_n da solução para a qual se tenha $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-8}$ e compare o número de iterações realizadas com a estimativa teórica.

13. Considere a equação $3x^2 - e^x = 0$.

(a) Localize graficamente as raízes da equação e indique intervalos de comprimento unitário que as contenham.

(b) Considere as seguintes sucessões

$$(S1) \quad x_{m+1} = \sqrt{\frac{e^{x_m}}{3}} \qquad (S2) \quad x_{m+1} = \ln(3\,x_m^2)$$

Mostre que é possível obter aproximações das raízes positivas da equação, usando, para cada raíz, uma destas sucessões. Indique em cada caso um intervalo onde poderá ser escolhida a iterada inicial x_0.

(c) Efectue duas iterações usando a sucessão (S1) com $x_0 = 1$. estime o número de algarismos significativos da aproximação obtida.

(d) Será possível usar (S1) para aproximar a maior raíz positiva da equação? E poderá usar (S2) para aproximar a menor raíz positiva ?

14. Considere o problema de cálculo das raízes do polinómio $p(x) = x^3 - 4x + 1$.

(a) Mostre que o polinómio tem três raízes reais $z_1 < z_2 < z_3$ tais que

$$z_1 \in [-2.2, -2.0], \quad z_2 \in [0.1, 0.3], \quad z_3 \in [1.8, 2.0].$$

(b) Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g_1(x) = (4x - 1)^{1/3}$ converge para z_1, qualquer que seja $x_o \in [-2.2, -2.0]$.

(c) Obtenha um valor aproximado de z_1 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

(d) Mostre que o m+etodo do ponto fixo com função iteradora $g_1(x)$ pode ser usado para calcular a raiz z_3, mas não a raiz z_2.

(e) Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g_2(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$ pode ser utilizado para calcular a raiz z_2, mas não qualquer uma das outras raízes.

(f) Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora

$$g_3(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

pode ser utilizado para calcular a raiz z_3, mas não qualquer uma das outras raízes.

(g) Mostre que o método de Newton, com aproximação inicial $x_0 \in [0.1, 0.3]$, converge para z_2. Obtenha uma aproximação de z_2 com erro absoluto inferior a 10^{-6}.

15. Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} x - \frac{y \cos x}{4} &= 0 \\ 1 - 2y + |x - 1| &= 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que existe uma única solução deste sistema no conjunto $[0,1] \times [1,2]$.

(b) Utilizando o método do ponto fixo, determine uma aproximação $x^{(n)}$ da solução que verifique $\|z - x^{(n)}\|_\infty \leq 0.0005$

16. Considere as linhas de $\mathbb{R}^2$ definidas pelas equações

$$x + 3\log_{10} x - y^2 = 0$$

$$2x^2 - xy - 5x = -1$$

Suponha que $P_0 = (3.4\,,\,2.2)$ é uma aproximação do ponto P onde as duas linhas se intersetam. utilize o método de newton para determinar uma aproximação $x^{(n+1)}$ (de P) que verifique

$$\|x^{n+1} - x^{(n)}\|_\infty \leq 0.005$$

17. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x_1 + \cos(x_1 x_2 x_3) &= 1 \\ (1 - x_1)^{1/4} + 0.05x_3^2 - 0.15x_3 &= 1 \\ -x_1^2 - 0.1x_2^2 + 0.01x_2 + x_3 &= 1 \end{cases}$$

(a) Escreva o sistema de equações lineares que lhe permite calcular a primeira iterada $x^{(1)}$ por aplicação do método de Newton generalizado.

(b) Poderá escolher $x^{(0)} = (000)$? Calcule $x^{(1)}$ a partir do vector inicial $(0\pi 3)$.

(c) Reescreva o sistema dado na forma $x = F(x)$ e defina o correspondente método iterativo $x_{n+1} = F(x_n)$. Usando como ponto inicial o $x^{(1)}$ obtido na alínea anterior, efetua duas iteração deste método.

18. Para combater um vírus que infectou um grupo de indivíduos vai ser administrado um composto químico sintetizado com base em quatro substâncias elementares S_1, S_2, S_3 e S_4. Sabe-se que se forem administrados α miligramas de composto a cada indivíduo, a concentração em $(mg/litro)$ de cada uma das substâncias elementares na circulação sanguínea é dada implicitamente (para $\alpha \in [0,5]$) pelo sistema de equações

$$\begin{cases} 16x_1 - \cos(\alpha\,(x_2 - 2x_1)) = 0 \\ 16x_2 + 0.75\sin\left(\alpha\,(-x_3 - 3x_1)\right) = 0 \\ 16x_3 - \cos(\alpha\,(x_4 - 2x_3)) = 0 \\ 16x_4 - 0.75\sin\left(2\alpha x_3\right) = 0 \end{cases}$$

a) Utilizando o teorema do ponto fixo num conjunto adequado, mostre que o sistema tem uma e uma só solução $z \in \mathbb{R}^4$. Obtenha essa solução, para diversos valores de α, com um erro inferior a 0.5×10^{-6}, medido na norma $\|\cdot\|_\infty$.

b) Trace gráficos aproximados da concentração de cada uma das substâncias elementares x_1, x_2, x_3 e x_4 para α pertencente ao intervalo $[0,5]$.

c) Sabe-se que a substância S_2 é bastante nociva se a sua concentração na circulação sanguínea fôr superior a 0.05 $mg/litro$. Pretende-se administrar a máxima quantidade α de forma que a concentração na corrente sanguínea da substância S_2, i.e. x_2, não exceda 0.03 $mg/litro$, o que corresponde a considerar uma margem de segurança. Proponha uma valor para a concentração α .