ISEG	ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 2º semestre, EN	17. 06. 13

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$ P2. $P(\Omega) = 1$ P3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\text{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$; $\text{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X\left[E(Y \mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X{}^{(r)}(0)$

$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = \left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda > 0, x = 0,1,\cdots)$; $X \sim B(n,\theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n > 1, x = 0,1,\cdots,n)$

$X \sim U(\alpha,\beta) \Rightarrow F_X(x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\ \alpha < x < \beta$; $X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\ (x > 0, \lambda > 0)$ e $M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$; $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$;

$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$; $X \sim \chi^2_{(n)} \Rightarrow E(X) = n$; $\text{Var}(X) = 2n$; $X \sim N(0;\ 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_{(1)}$; $X \sim G(\alpha;\ \lambda) \Rightarrow cX \ \sim G(\alpha;\ \lambda/c)$;

$X \sim N(0;1)$ e $Y \sim \chi^2_{(n)} \Rightarrow X\Big/\sqrt{Y/n} \sim t_{(n)}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
O tempo entre transacções na Bolsa de Valores de Lisboa é uma variável aleatória discreta.		X
Se $P(A\|B) < P(A)$ então A e B não são acontecimentos independentes.	X	
Se A e B são acontecimentos incompatíveis então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	X	
Se A_1, A_2 e A_3 constituem uma partição do espaço de resultados, então os acontecimentos A_1, A_2 e A_3 são incompatíveis.	X	

2. Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição $F(x)$, função probabilidade $f(x)$ e $a \in \Re$
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
Se X tem distribuição uniforme discreta em n pontos, então $F_X(x)$ é constante.		X
Se $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ então $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.		X
A variável aleatória $Y = \varphi(X)$ pode ser discreta, contínua ou mista.		X
Os pontos de descontinuidade de $F(x)$ pertencem ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\}$.	X	

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ e $F_y(y)$ função distribuição marginal de Y.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
Se $F_{X,Y}(3,5) = 1$, Então $F_{X,Y}(2,1) \leq 1$.	X	
Se $Cov(X,Y) = 0$ pode concluir-se que X e Y são v.a.(s) independentes.		X
Se X e Y são independentes então $E(X\|Y = y) = E(Y)$.		X
A probabilidade condicionada $P(X \leq x\|Y \leq y) = F_{X,Y}(x,y)/F_Y(y)$.	X	

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X\sim N(0{,}9) \Rightarrow (X/3)^2 \sim \chi^2_{(1)}$.	X	
Se $X_1\sim B(5;\ 0.1)$ e $X_2\sim B(3;\ 0.1)$ são v.a.(s) independentes então $X_1+X_2\sim B(8;0.1)$.	X	
Num processo de Poisson o número médio de ocorrências por hora é igual a λ. O tempo de espera, em horas, entre ocorrências consecutivas tem uma distribuição exponencial de parâmetro λ.	X	
Se $X\sim U(1,5)$ então a mediana de X é igual a $1/5$.		X

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n>2$, uma amostra casual simples retirada de uma População X de parâmetros desconhecidos. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*

	V	F
O valor esperado da variância corrigida da amostra dá, em média, valores iguais à variância da população.	X	
$(X_i-\bar{X})/\sigma$ é uma estatística.		X
Se n suficientemente grande, então $\bar{X}/\sigma \stackrel{\cdot}{\sim} N(\mu/\sigma, 1/n)$.	X	
Se a população $X\sim Ex(\lambda)$ então $2\boldsymbol{\lambda}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} X_i \sim G(n,1/2)$.	X	

6. Mostre que a função distribuição de X condicionada por $a<X\leq b$ é dada por:

$$F_{X|a<X\leq b}(x)=\begin{cases} 0 & x\leq a \\ \frac{F_X(x)-F_X(a)}{F_X(b)-F_X(a)} & a<x\leq b \\ 1 & x\geq b\end{cases}$$

Justifique cuidadosamente todos os passos.[Cotação:15]

$$x\leq a \Rightarrow (-\infty,x]\cap(a<X\leq b)=\emptyset \Rightarrow \frac{P[(X\leq x)\cap(a<X\leq b)]}{P(a<X\leq b)}=\frac{P(\emptyset)}{P(a<X\leq b)}=\frac{0}{P(a<X\leq b)}=0$$

$$a<x<b \Rightarrow (-\infty,x]\cap(a<X\leq b)=(a,x] \Rightarrow \frac{P[(X\leq x)\cap(a<X\leq b)]}{P(a<X\leq b)}=\frac{P(a<X\leq x)}{P(a<X\leq b)}=\frac{F_X(x)-F_X(a)}{F_X(b)-F_X(a)}$$

$$x>b \Rightarrow (-\infty,x]\cap(a<X\leq b)=(a<X\leq b) \Rightarrow \frac{P[(X\leq x)\cap(a<X\leq b)]}{P(a<X\leq b)}=\frac{P(a<X\leq b)}{P(a<X\leq b)}=1$$

$$\Leftrightarrow F_{X|a<X\leq b}(x)\begin{cases} 0 & x\leq a \\ \dfrac{F_X(x)-F_X(a)}{F_X(b)-F_X(a)} & a<x<b \\ 1 & x\geq b\end{cases}$$

7. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias identicamente distribuídas e positivamente correlacionadas. Comente a seguinte afirmação: *A covariância entre X e Y nunca pode ser superior à variância de X.*
[Sugestão: Comece por desenvolver a expressão do coeficiente de correlação] [Cotação: 15]

$\boldsymbol{0\leq \rho_{X,Y}\leq 1} \Leftrightarrow \boldsymbol{0}\leq \frac{\boldsymbol{Cov(X,Y)}}{\sqrt{\sigma_X^2.\sigma_Y^2}}\leq 1$ como as variáveis são identicamente distribuídas e positivamente correlacionadas tem-se:

$$\boldsymbol{0}\leq \frac{\boldsymbol{Cov(X,Y)}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma_X^2.\sigma_X^2}}}\leq 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{0}\leq \frac{\boldsymbol{Cov(X,Y)}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma_X^4}}}\leq 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{0}\leq \frac{\boldsymbol{Cov(X,Y)}}{\boldsymbol{\sigma_X^2}}\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq \boldsymbol{Cov(X,Y)}\leq \boldsymbol{\sigma_X^2}$$

ISEG **ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 2º semestre, EN** **17. 06. 13**

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$ P2. $P(\Omega) = 1$ P3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\mathrm{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X\left[E(Y \mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X{}^{(r)}(0)$;

$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = \left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda > 0, x = 0,1,\cdots)$; $X \sim B(n,\theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n > 1, x = 0,1,\cdots,n)$

$X \sim U(\alpha,\beta) \Rightarrow F_X(x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\ \alpha < x < \beta$; $X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\ (x < 0)$; $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$; $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$;

$X \sim \chi^2_{(n)}$ então $E(X) = n$; $\mathrm{Var}(X) = 2n$; $X \sim N(0;\ 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_{(1)}$; $X \sim G(\alpha;\ \lambda) \Rightarrow cX\ \sim G\left(\alpha, \frac{\lambda}{c}\right)$;

$X \sim N(0;1)\ e\ Y \sim \chi^2_{(n)} \Rightarrow X\big/\sqrt{Y/n} \sim t_{(n)}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva, de um espaço de resultados Ω. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O número de acções de uma empresa particular, que são negociadas a cada dia útil é uma variável aleatória discreta.	X	
Se $P(A\|B) > P(A)$ então A e B são acontecimentos independentes.		X
Se A e B são acontecimentos incompatíveis então $P(A\|B) = P(A)$.		X
Se A_1, A_2 e A_3 constituem uma partição do espaço de resultados, então os acontecimentos A_1, A_2 e A_3 são independentes.		X

2. Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição $F(x)$, função densidade de probabilidade $f(x)$. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim U(a,b),\ a < b, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow F_X(x)$ é constante no intervalo (a,b).		X
Se $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ então $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.	X	
A variável aleatória $Y = \varphi(X)$ só pode ser contínua ou mista.		X
$F(x)$ não tem pontos de descontinuidade em todo o seu domínio.	X	

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ e $F_X(x)$função distribuição marginal de X.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $F_{X,Y}(5,3) = 1$, Então $F_{XY}(4,3) = 1$.		X
Se $Cov(X,Y) \neq 0$ pode concluir-se que X e Y não são v.a.(s) independentes.	X	
Se X e Y são independentes então $E(X\|Y = y) = E(X)$.	X	
A probabilidade condicionada $P(Y \leq y\|X \leq x) = F_{X,Y}(x,y)/F_X(x)$.	X	

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim N(2,1) \Rightarrow (X-2)^2 \sim \chi^2_{(1)}$.	X	
Sejam $X_1 \sim B(5;\ 0.1)$ e $X_2 \sim B(3;\ 0.1)$ v.a.(s) dependentes, então $X_1 + X_2 \sim B(8; 0.1)$.		X
Num processo de Poisson o número médio de ocorrências por hora é igual a λ. O tempo médio de espera, em horas, entre ocorrências consecutivas é $1/\lambda$.	X	
Se $X \sim U(1,3)$ então a mediana de X é igual a 2.	X	

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População X de parâmetros desconhecidos.

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O valor esperado da variância da amostra dá, em média, valores inferiores à variância da população.	X	
$(X_i - \bar{X})$ é uma estatística $(i = 1, 2, \cdots, n)$.	X	
Se n suficientemente grande, então $\bar{X}/\sigma \dot{\sim} N(\mu, 1/n)$.	X	
Se a população $X \sim Ex(\lambda)$ então $\bar{X} \sim G(n, \lambda n)$.	X	

6. Mostre que a função distribuição de X condicionada por $a < X \leq b$ é dada por:

$$F_{X|a<X\leq b}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{F_X(x) - F_X(a)}{F_X(b) - F_X(a)} & a < x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Justifique cuidadosamente todos os passos.[Cotação: 15]

7. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias identicamente distribuídas e positivamente correlacionadas. Comente a seguinte afirmação: *A covariância entre X e Y nunca pode ser superior à variância de X.*

[Sugestão: Comece por desenvolver a expressão do coeficiente de correlação] [Cotação: 15]

ISEG **ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 1º semestre, EN** **17. 06. 13**

1ª Parte - Teórica – 40 minutos V3

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\mathrm{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1,x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim U(\alpha,\beta)\Rightarrow F_X(x)=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\ \alpha<x<\beta$; $X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\ (x<0)$; $\bar{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}{n}$;

$X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\mathrm{Var}(X)=2n$; $X\sim N(0;\ 1)\Rightarrow X^2\sim\chi^2_{(1)}$; $X\sim G(\alpha;\ \lambda)\Rightarrow cX\ \sim G\left(\alpha,\frac{\lambda}{c}\right)$;

$X\sim N(0;1)\ e\ Y\sim\chi^2_{(n)}\Rightarrow X\Big/\sqrt{Y/n}\sim t_{(n)}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

1. Sejam A e B acontecimentos de um espaço de resultados Ω, com probabilidade positiva. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O tempo entre transacções na Bolsa de Valores de Lisboa é uma variável aleatória contínua.	X	
Se $P(A\|B)<P(A)$ então A e B são acontecimentos independentes.		X
Se A e B não são acontecimentos incompatíveis então $P(A\cup B)>P(A)+P(B)$.		X
Se A_1,A_2 e A_3 constituem uma partição do espaço de resultados, então $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=0$.	X	

2. Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição $F(x)$, função probabilidade $f(x)$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se X tem distribuição uniforme discreta em n pontos, então $F_X(x)$ é estritamente crescente.		X
Se $a,b\in\mathbb{R},a<b$ então $P(a<X\leq b)=F(b)-F(a-0)$.		X
A variável aleatória $Y=\varphi(X)$ só pode ser discreta.	X	
$F(x)$ pode ter uma infinidade de pontos de descontinuidade.	X	

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ e $F_X(x)$função distribuição marginal de X.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $F_{X,Y}(5,3)=1$, Então $F_{XY}(5,2)\leq 1$.	X	
Se X e Y são v.a.(s) independentes então pode concluir-se que $Cov(X,Y)=0$.	X	
Se X e Y são independentes então $E(Y\|X=x)=E(Y)$.	X	
A probabilidade condicionada $P(Y\leq y\|X\leq x)=F_{X,Y}(x,y)/F_X(x)$.	X	

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim N(0{,}25) \Rightarrow (X/5)^2 \sim \chi^2_{(1)}$.	X	
Se $X_1 \sim B(5;\ 0.1)$ e $X_2 \sim B(5;\ 0.3)$ são v.a.(s) independentes então $X_1 + X_2 \sim B(10; 0.4)$.		X
Num processo de Poisson o número médio de ocorrências por hora é igual a λ. O tempo de espera, em horas, entre ocorrências consecutivas tem uma distribuição exponencial de parâmetro $1/\lambda$.		X
Se $X \sim U(1, 5)$ então a mediana de X é igual a 3.	X	

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População X de parâmetros desconhecidos.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O valor esperado da variância corrigida da amostra dá, em média, valores inferiores à variância da população.		X
$(X_i - \bar{X})/\sigma$ é uma estatística.		X
Se n suficientemente grande, então $(\bar{X} - \mu)/\sigma \dot{\sim} N(0, 1/n)$.	X	
Se a população $X \sim Ex(\lambda)$ então $2\boldsymbol{\lambda} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} X_i \sim G(n, 1/2)$.	X	

6. Mostre que a função distribuição de X condicionada por $a < X \leq b$ é dada por:

$$F_{X|a<X\leq b}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{F_X(x) - F_X(a)}{F_X(b) - F_X(a)} & a < x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Justifique cuidadosamente todos os passos.[Cotação: 15]

7. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias identicamente distribuídas e positivamente correlacionadas. Comente a seguinte afirmação: *A covariância entre X e Y nunca pode ser superior à variância de X.*

[Sugestão: Comece por desenvolver a expressão do coeficiente de correlação] [Cotação: 15]

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas erradas descontam 0,5. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$ P2. $P(\Omega) = 1$ P3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\text{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$; $\text{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X\left[E(Y \mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$

$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = \left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda > 0, x = 0,1,\cdots)$; $X \sim B(n,\theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n > 1, x = 0,1,\cdots,n)$

$X \sim U(\alpha,\beta) \Rightarrow F_X(x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\ \alpha < x < \beta$; $X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\ (x < 0)$; $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$; $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$;

$X \sim \chi^2_{(n)}$ então $E(X) = n$; $\text{Var}(X) = 2n$; $X \sim N(0;\ 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_{(1)}$; $X \sim G(\alpha;\ \lambda) \Rightarrow cX\ \sim G\left(\alpha, \frac{\lambda}{c}\right)$;

$X \sim N(0;1)\ e\ Y \sim \chi^2_{(n)} \Rightarrow X \big/ \sqrt{Y/n} \sim t_{(n)}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

1. Sejam A,B e C acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O número de acções de uma empresa particular, que são negociadas a cada dia útil é uma variável aleatória contínua.		X
Se $P(A\|B) > P(A)$ então A e B são acontecimentos independentes.		X
Se A e B não são acontecimentos incompatíveis então $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.		X
Se A_1, A_2 e A_3 constituem uma partição do espaço de resultados, então $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall\, i,j = 1,2,3\ \ (i \neq j)$.	X	

2. Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição $F(x)$, função densidade $f(x)$
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim U(a,b),\ a < b, a,b\ \in \mathbb{R} \Rightarrow F_X(x)$ é estritamente crescente no intervalo (a,b).	X	
Se $a,b \in\ \mathbb{R}, a < b$ então $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a-0)$.		X
A variável aleatória $Y = \varphi(X)$ não pode ser discreta.		X
$F(x)$ é contínua em todo o seu domínio.	X	

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ e $F_Y(y)$função distribuição marginal de Y.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $F_{X,Y}(5,3) = 1$, Então $F_{XY}(6,4) < 1$.		X
Se $Cov(X,Y) = 0$ nada se pode concluir-se sobre a independência das v.a.(s) X e Y.	X	
Se X e Y são independentes então $E(Y\|X = x) = E(Y)$.	X	
A probabilidade condicionada $P(Y \leq y\|X \leq x) = F_{X,Y}(x,y)/F_Y(y)$.		X

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim N(5{,}1) \Rightarrow (X-5)^2 \sim \chi^2_{(1)}$.	X	
Se $X_1 \sim B(5;\ 0.1)$ e $X_2 \sim B(5;\ 0.1)$ são v.a.(s) independentes então $X_1 + X_2 \sim B(5; 0.1)$.		X
Num processo de Poisson o número médio de ocorrências por hora é igual a λ. O tempo médio de espera, em horas, entre ocorrências consecutivas é λ.		X
Se $X \sim U(1,3)$ então a mediana de X é igual a 1.		X

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População X de parâmetros desconhecidos.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O valor esperado da variância da amostra dá, em média, valores iguais à variância da população.		X
$(X_i - \bar{X})$ é uma estatística.	X	
Se n suficientemente grande, então $(\bar{X} - \mu) \dot{\sim} N(0, \sigma_X^2/n)$.	X	
Se a população $X \sim Ex(\lambda)$ então $\bar{X} \sim G(n, \lambda n)$.	X	

6. Mostre que a função distribuição de X condicionada por $a < X \leq b$ é dada por:

$$F_{X|a<X\leq b}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{F_X(x) - F_X(a)}{F_X(b) - F_X(a)} & a < x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Justifique cuidadosamente todos os passos.[Cotação: 15]

7. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias identicamente distribuídas e positivamente correlacionadas. Comente a seguinte afirmação: *A covariância entre X e Y nunca pode ser superior à variância de X.*

[Sugestão: Comece por desenvolver a expressão do coeficiente de correlação] [Cotação: 15]

Exame Época Normal
2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:______________________________**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(20)	2a.(10)	3a.(10)	3c.(20)	4b.(10)	T:
	2b.(10)	3b.(10)	4a.(10)	4c. (20)	P:

Atenção: nas questões de resposta múltipla, uma resposta incorrecta desconta 2.5

1. Se o governo não cair a probabilidade de manutenção da política de austeridade é de 95%. Se o governo cair a probabilidade de manutenção da política de austeridade reduz-se para 40%. Sabe-se que a probabilidade de o governo não cair é de 90%. Mantendo-se esta política de austeridade, qual a probabilidade de este governo não cair?

$$P(\bar{A}|B) = 0.9553$$

2. Os erros aleatórios percentuais associados às previsões que um economista faz para o governo podem ser bem modelados por uma distribuição normal com média 3% e desvio padrão 2%. A previsão é considerada uma boa previsão se o erro de previsão, **em valor absoluto**, for inferior a 0.4%. Se for superior a esse valor então a previsão é considerada uma má previsão.

a) Qual a probabilidade de o economista obter uma boa previsão

0.9032 ☐ 0.0522 X 0.9478 ☐ 0.0968 ☐

b) Admita que a probabilidade do economista fazer boas previsões é de 5%. Se o economista faz 5 previsões, qual a probabilidade de obter exactamente 3 previsões más.

0.0011 ☐ 0.0226 ☐ 0.8574 ☐ 0.0214 X

3. Seja X uma variável aleatória que representa a situação profissional de um indivíduo pertencente à população activa (**X=0 se o indivíduo está empregado e 1 caso contrário**) e seja a variável Y que representa a classe etária do mesmo indivíduo (**$Y = 1$ se o indivíduo tem menos de 30 anos; $Y = 2$ se o indivíduo tem entre 30 e 45 anos; $Y = 3$ se o indivíduo tem 45 anos ou mais**).

Sabendo que dos indivíduos desempregados:

- 25% têm entre 30 e 45 anos
- 50% têm menos de 30 anos

a) Complete a tabela abaixo de modo a que se tenha uma função de probabilidade conjunta, $f_{XY}(x,y)$.

		X		
		0	1	$f_Y(y)$
Y	0	0,1	0,2	0,3
	1	0,25	0,1	0,35
	2	0,25	0,1	0,35
	$f_X(x)$	0,6	0,4	

[**Nota**: caso não tenha obtido os valores para preenchimento do quadro da alínea a), pode assumir quaisquer valores que garantam que a tabela anterior é uma função probabilidade conjunta na resolução das alíneas seguintes]

b) Serão as variáveis aleatórias independentes? Justifique.

X e Y não são independentes

c) Calcule o valor esperado de Y condicionado por $X = 1$

$$E_Y(Y|X = 1) = 1.75$$

4. Um exame de Estatística é composto exclusivamente por questões de escolha múltipla. O número de escolhas múltiplas que o Ernesto resolve em cada 5 minutos pode ser modelado por uma distribuição de Poisson de média 1.

a) Qual a probabilidade de num minuto o Ernesto resolver exactamente uma questão?

0.1637 X   0.3679 ☐   0.9825 ☐   0.7358 ☐

b) Qual a probabilidade de o Ernesto demorar menos de 5 minutos a responder a uma questão?

0.9933 ☐   0.6321 X   0.3679 ☐   0.0067 ☐

c) Seleccionadas aleatoriamente 3 questões do exame, qual a probabilidade de a que levou mais tempo a responder tenha demorado menos de 5 minutos?

$$P\left(X_{(3)} < 5\right) = 0.2526$$

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças - 2ºSem. 2012-13 **17. 06. 13**
Exame Época Normal
2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(20)	2a.(10)	3a.(10)	3c.(20)	4b.(10)	T:
	2b.(10)	3b.(10)	4a.(10)	4c. (20)	P:

Atenção: nas questões de resposta múltipla, uma resposta incorrecta desconta 2.5

1. Se o governo não cair a probabilidade de manutenção da política de austeridade é de 95%. Se o governo cair a probabilidade de manutenção da política de austeridade reduz-se para 40%. Sabe-se que a probabilidade de o governo não cair é de 90%. Mantendo-se esta política de austeridade, qual a probabilidade de este governo não cair?

2. Os erros aleatórios percentuais associados às previsões que um economista faz para o governo podem ser bem modelados por uma distribuição normal com média 3% e desvio padrão 2%. A previsão é considerada uma boa previsão se o erro de previsão, **em valor absoluto**, for inferior a 0.4%. Se for superior a esse valor então a previsão é considerada uma má previsão.

a) Qual a probabilidade de o economista obter uma má previsão?

0.9478 X   0.0968 ☐   0.9032 ☐   0.0522 ☐

b) Admita que a probabilidade do economista fazer más previsões é de 90%. Se o economista faz 5 previsões. Qual a probabilidade de obter exactamente 3 previsões boas.

0.0010 ☐   0.0729 ☐   0.0081 X   0.9995 ☐

3. Seja X uma variável aleatória que representa a situação profissional de um indivíduo pertencente à população activa (**X=0 se o indivíduo está empregado e 1 caso contrário**) e seja a variável Y que representa a classe etária do mesmo indivíduo (**$Y = 1$ se o indivíduo tem menos de 30 anos; $Y = 2$ se o indivíduo tem entre 30 e 45 anos; $Y = 3$ se o indivíduo tem 45 anos ou mais**).

Sabendo que dos indivíduos desempregados:

- 25% têm entre 30 e 45 anos
- 50% têm menos de 30 anos

a) Complete a tabela abaixo de modo a que se tenha uma função de probabilidade conjunta, $f_{XY}(x, y)$.

		X		
		0	1	$f_Y(y)$
Y	1			0,3
	2			0,35
	3			0,35
	$f_X(x)$	0,6	0,4	

[**Nota**: **caso não tenha obtido os valores para preenchimento do quadro da alínea a), pode assumir quaisquer valores que garantam que a tabela anterior é uma função probabilidade conjunta na resolução das alíneas seguintes**]

b) Serão as variáveis aleatórias independentes? Justifique.

c) Calcule o valor esperado de Y condicionado por $X = 1$.

4. Um exame de Estatística é composto exclusivamente por questões de escolha múltipla. O número de escolhas múltiplas que o Ernesto resolve em cada 5 minutos pode ser modelado por uma distribuição de Poisson de média 1.

a) Qual a probabilidade de num minuto o Ernesto resolver exactamente duas questões?

0.9197 ☐ 0.9989 ☐ 0.0164 X 0.1839 ☐

b) Qual a probabilidade de o Ernesto demorar mais de 5 minutos a responder a uma questão?

0.6321 ☐ 0.3679 X 0.0067 ☐ 0.9933 ☐

c) Seleccionadas aleatoriamente 3 questões do exame, qual a probabilidade de a que levou mais tempo a responder tenha demorado mais de 5 minutos?

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças-2ºSem. 2012-13 **17. 06. 13**

Exame Época Normal
2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(20)	2a.(10)	3a.(10)	3c.(20)	4b.(10)	T:
	2b.(10)	3b.(10)	4a.(10)	4c. (20)	P:

Atenção: nas questões de resposta múltipla, uma resposta incorrecta desconta 2.5

1. Se o governo não cair a probabilidade de manutenção da política de austeridade é de 95%. Se o governo cair a probabilidade de manutenção da política de austeridade reduz-se para 40%. Sabe-se que a probabilidade de o governo não cair é de 90%. Mantendo-se esta política de austeridade, qual a probabilidade de este governo não cair?

2. Os erros aleatórios percentuais associados às previsões que um economista faz para o governo podem ser bem modelados por uma distribuição normal com média 3% e desvio padrão 2%. A previsão é considerada uma boa previsão se o erro de previsão, **em valor absoluto**, for inferior a 0.5%. Se for superior a esse valor então a previsão é considerada uma má previsão.

a) Qual a probabilidade de o economista obter uma boa previsão?

0.9344 ☐ 0.0656 X 0.8944 ☐ 0.1056 ☐

b) Admita que a probabilidade do economista fazer boas previsões é de 5%. Se o economista faz 6 previsões. Qual a probabilidade de obter exactamente 3 previsões más.

0.8574 ☐ 0.0021 X 0.0146 ☐ 0.0226 ☐

3. Seja X uma variável aleatória que representa a situação profissional de um indivíduo pertencente à população activa (**X=0 se o indivíduo está empregado e 1 caso contrário**) e seja a variável Y que representa a classe etária do mesmo indivíduo (**$Y = 1$ se o indivíduo tem menos de 30 anos; $Y = 2$ se o indivíduo tem entre 30 e 45 anos; $Y = 3$ se o indivíduo tem 45 anos ou mais**).

Sabendo que dos indivíduos desempregados:

- 25% têm entre 30 e 45 anos
- 50% têm menos de 30 anos

a) Complete a tabela abaixo de modo a que se tenha uma função de probabilidade conjunta, $f_{XY}(x, y)$.

		X		
		0	1	$f_Y(y)$
Y	1			0,3
	2			0,35
	3			0,35
	$f_X(x)$	0,6	0,4	

[**Nota**: **caso não tenha obtido os valores para preenchimento do quadro da alínea a), pode assumir quaisquer valores que garantam que a tabela anterior é uma função probabilidade conjunta na resolução das alíneas seguintes**]

b) Serão as variáveis aleatórias independentes? Justifique.

c) Calcule o valor esperado de Y condicionado por $X = 1$.

4. Um exame de Estatística é composto exclusivamente por questões de escolha múltipla. O número de escolhas múltiplas que o Ernesto resolve em cada 5 minutos pode ser modelado por uma distribuição de Poisson de média 2.

a) Qual a probabilidade de num minuto o Ernesto resolver exactamente uma questão?

0.2707 ☐ 0.9385 ☐ 0.4060 ☐ 0.2681 X

b) Qual a probabilidade de o Ernesto demorar menos de 5 minutos a responder a uma questão?

1.0000 ☐ 0.8647 X 0.0000 ☐ 0.1353 ☐

c) Seleccionadas aleatoriamente 3 questões do exame, qual a probabilidade de a que levou mais tempo a responder tenha demorado menos de 5 minutos?

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças-2ºSem. 2012-13 **17. 06. 13**

Exame Época Normal

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(20)	2a.(10)	3a.(10)	3c.(20)	4b.(10)	T:
	2b.(10)	3b.(10)	4a.(10)	4c. (20)	P:

Atenção: nas questões de resposta múltipla, uma resposta incorrecta desconta 2.5

1. Se o governo não cair a probabilidade de manutenção da política de austeridade é de 95%. Se o governo cair a probabilidade de manutenção da política de austeridade reduz-se para 40%. Sabe-se que a probabilidade de o governo não cair é de 90%. Mantendo-se esta política de austeridade, qual a probabilidade de este governo não cair?

2. Os erros aleatórios percentuais associados às previsões que um economista faz para o governo podem ser bem modelados por uma distribuição normal com média 3% e desvio padrão 2%. A previsão é considerada uma boa previsão se o erro de previsão, **em valor absoluto**, for inferior a 0.5%. Se for superior a esse valor então a previsão é considerada uma má previsão.

a) Qual a probabilidade de o economista obter uma má previsão?

0.8944 ☐ 0.0656 ☐ 0.9344 X 0.1056 ☐

b) Admita que a probabilidade do economista fazer más previsões é de 95%. Se o economista faz 5 previsões. Qual a probabilidade de obter exactamente 3 previsões boas.

0.0214 ☐ 0.0011 X 0.0001 ☐ 0.0815 ☐

3. Seja X uma variável aleatória que representa a situação profissional de um indivíduo pertencente à população activa (**X=0 se o indivíduo está empregado e 1 caso contrário**) e seja a variável Y que representa a classe etária do mesmo indivíduo (**$Y = 1$ se o indivíduo tem menos de 30 anos; $Y = 2$ se o indivíduo tem entre 30 e 45 anos; $Y = 3$ se o indivíduo tem 45 anos ou mais**).

Sabendo que dos indivíduos desempregados:

- 25% têm entre 30 e 45 anos
- 50% têm menos de 30 anos

a) Complete a tabela abaixo de modo a que se tenha uma função de probabilidade conjunta, $f_{XY}(x, y)$.

		X		
		0	1	$f_Y(y)$
Y	1			0,3
	2			0,35
	3			0,35
	$f_X(x)$	0,6	0,4	

[**Nota**: **caso não tenha obtido os valores para preenchimento do quadro da alínea a), pode assumir quaisquer valores que garantam que a tabela anterior é uma função probabilidade conjunta na resolução das alíneas seguintes**]

b) Serão as variáveis aleatórias independentes? Justifique.

c) Calcule o valor esperado de Y condicionado por $X = 1$.

4. Um exame de Estatística é composto exclusivamente por questões de escolha múltipla. O número de escolhas múltiplas que o Ernesto resolve em cada 5 minutos pode ser modelado por uma distribuição de Poisson de média 2.

a) Qual a probabilidade de num minuto o Ernesto resolver exactamente duas questões?

0.0536 X   0.9921 ☐   0.2707 ☐   0.6767 ☐

b) Qual a probabilidade de o Ernesto demorar mais de 5 minutos a responder a uma questão?

1.0000 ☐   0.1353 X   0.8647 ☐   0.0000 ☐

c) Seleccionadas aleatoriamente 3 questões do exame, qual a probabilidade de a que levou mais tempo a responder tenha demorado mais de 5 minutos?