**1ª Parte - Teórica – 40 minutos**

**Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!**

**Nome:**________________________________________________________________**Número:**_________

**Formulário**

Axiomática:P1. $P(A)\geq 0$; P2. $P(\Omega)=1$; P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$; $F_X(x)=F_{X,Y}(x;+\infty)$

$\mathrm{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$ ; $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1,x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\ (x<0)$; $\bar{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\bar{X}^2$; $(n-1)S'^2=nS^2$

$X\sim\chi^2_{(n)}\Rightarrow E(X)=n$; $\mathrm{Var}(X)=2n$; $X\sim N(0;\ 1)\Rightarrow X^2\sim\chi^2_{(1)}$; $X\sim G(n;\ \lambda)\Rightarrow 2\lambda X\ \sim\chi^2_{(2n)}$;

$X\sim N(0;1)\ e\ Y\sim\chi^2_{(n)}\Rightarrow X\big/\sqrt{Y/n}\sim t_{(n)}$; $P(Max\{X_i\}\leq x)=[F_X(x)]^n$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*

**1.** Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados $\Omega$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | **V** | **F** |
|---|---|---|
| O espaço de resultados associado à experiência aleatória que consiste na observação do número de pessoas admitidas na urgência de um hospital durante uma hora é discreto. | X | |
| Se os acontecimentos A e B são incompatíveis e $A\cup B=\Omega$, então A e B formam uma partição de $\Omega$. | X | |
| Se $P(A)=0.4$ e $P(B)=0.4$ e $P(A\|B)=0.75$, os acontecimentos A e B são independentes. | | X |
| $P(A\|B)=P(A)/P(B)$ se e só se $A\subset B$ | X | |

**2.** Seja $X$ uma variável aleatória discreta com função de distribuição $F(x)$, função probabilidade $f(x)$ e $a\in\mathbb{R}$
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | **V** | **F** |
|---|---|---|
| $F_X(x)$ é uma função estritamente crescente | | X |
| Se $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ então $P(a\leq X<b)=F(b-0)-F(a)$ | | X |
| A variável aleatória $Y=\varphi(X)$ pode ser discreta, contínua ou mista | | X |
| Os pontos de descontinuidade de $F(x)$ pertencem ao conjunto $\{x\in\mathbb{R}:P(X=x)>0\}$ | X | |

**3.** Seja $(X,Y)$ uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ e $F_y(y)$ função distribuição marginal de $Y$. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | **V** | **F** |
|---|---|---|
| Se $F_{X,Y}(1.5,2.3)=1$, então $F_Y(2.3)=1$ | X | |
| Se $Cov(X,Y)=0$ pode concluir-se que $X$ e $Y$ são v.a.(s) independentes | | X |
| Se $X$ e $Y$ são v.a.(s) independentes então $X^2$ e $Y^2$ também são v.a.(s) independentes | X | |
| Se $f_{X\|Y=y}(x)=f_X(x)$ então $X$ e $Y$ são v.a.(s) independentes $\forall(x,y)\in\mathbb{R}$ | X | |

**vsff →**

**4.** Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| Se $X \sim N(1,1)$ então para qualquer constante $\boldsymbol{c}$ se tem que $\boldsymbol{c}X \sim N(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})$ | | X |
| Se $X_1 \sim B(5;\ 0.1)$ e $X_2 \sim B(3;\ 0.5)$ são v.a.(s) independentes então $X_1 + X_2 \sim B(8; 0.6)$ | | X |
| Se um processo de Poisson tem taxa média igual a $\lambda$ por unidade de tempo, o tempo médio de espera pela 1ª ocorrência é $1/\lambda$. | X | |
| Se $X \sim U(0,1)$ e $0 < a < b < 1$ então $P(X < a \mid X < b) = a/b$ | X | |

**5.** Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População $X$ de parâmetros desconhecidos. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*

| | V | F |
|---|---|---|
| A variância da média da amostra é superior à variância da população | | X |
| $2\lvert X_1 + X_n \rvert$ é uma estatística | X | |
| $P(Max\{X_i\} \leq x) = [P(X_1 \leq x)]^n$ | X | |
| Se $X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow P(\bar{X} > a) = P(\bar{X} < -a)\ \forall a \in$ | X | |

**6.** Seja uma variável aleatória $X \sim Ex(\boldsymbol{\lambda})$ e $c > 0$ uma constante. Prove que $Y = cX \sim Ex\left(\frac{\lambda}{c}\right)$. Justifique todos os passos.[Cotação: 15]

Se $Y = cX$, então $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(cX \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{c}\right) = 1 - e^{-\lambda(y/c)} = 1 - e^{-(\lambda/c)y}$ pelo que

$$Y = cX \sim Ex\left(\frac{\lambda}{c}\right)$$

**7.** Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População $X$ com média igual a $\mu$ e $T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ uma estatística. Considere $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ constantes a verificar $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Mostre que $E(T) = \mu$. Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

$$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n) = E(\alpha_1 X_1) + E(\alpha_2 X_2) + \cdots + E(\alpha_n X_n)$$

$= \alpha_1 E(X_1) + \alpha_2 E(X_2) + \cdots + \alpha_n E(X_n)$ como $X_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ são identicamente distribuídas

$= \alpha_1 E(X) + \alpha_2 E(X) + \cdots + \alpha_n E(X) = \mu \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \mu \times 1 = \mu$

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

**Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!**

**Nome:**________________________________________________**Número:**_________

**Formulário**

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$; P2. $P(\Omega)=1$; P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$; $F_X(x) = F_{X,Y}(x;+\infty)$

$\operatorname{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\operatorname{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\operatorname{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$ ; $\operatorname{Var}(aX+bY)=a^2\operatorname{Var}(X)+b^2\operatorname{Var}(Y)+2ab\operatorname{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$;

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1,x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\ \ (x<0)$; $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\overline{X}^2$ ; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\operatorname{Var}(X)=2n$; $X\sim N(0;\ 1)\Rightarrow X^2\sim\chi^2_{(1)}$; $X\sim G(n;\ \lambda)\Rightarrow 2\lambda X\ \sim\chi^2_{(2n)}$;

$X\sim N(0;1)\ e\ Y\sim\chi^2_{(n)}\Rightarrow X\big/\sqrt{Y/n}\sim t_{(n)}$; $P(Max\{X_i\}\leq x)=[F_X(x)]^n$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

**1.** Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva, de um espaço de resultados $\Omega$. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| Se se seleccionar ao acaso um cliente que entra num armazém e se observar se ele compra uma camisa está a realizar-se uma prova de Bernoulli. | X | |
| Se os acontecimentos A e B são independentes e $A\cup B=\Omega$, então A e B formam uma partição de $\Omega$. | | X |
| Se $P(A)=0.3$ e $P(B)=0.4$ e $P(A\mid B)=0.75$, os acontecimentos A e B não são incompatíveis | X | |
| $P(A\mid B)=P(A)/P(B)$ se e só se $B\subset A$ | | X |

**2.** Seja $X$ uma variável aleatória contínua com função de distribuição $F(x)$, função densidade de probabilidade $f(x)$. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| O contradomínio da função densidade de probabilidade $f_X(x)$ é $[0;1]$ | | X |
| Se $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ então $P(a\leq X<b)=F(b)-F(a-0)$ | X | |
| Se a variável aleatória $Y=\varphi(X)$ então $Y$ só pode ser contínua ou mista | | X |
| $F(x)$ é contínua em todo o seu domínio | X | |

**3.** Seja $(X,Y)$ uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ e $F_y(y)$função distribuição marginal de Y.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| Se $F_{X,Y}(1.5,2.3)=1$, Então $F_X(1.5)=1$ | X | |
| Se $Cov(X,Y)\neq 0$ pode concluir-se que X e Y não são v.a.(s) independentes | X | |
| Se $X$ e $Y$ são v.a.(s) independentes então $X^2$ e $Ln(Y)$ também são v.a.(s) independentes | X | |
| Se $f_{X\mid Y=y}(x)=f_Y(y)$ então $X$ e $Y$ são v.a.(s) independentes $\forall(x,y)\in\mathbb{R}$ | | X |

vsff →

**4.** Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| Se $X \sim N(1,1)$ então para qualquer constante $\boldsymbol{c}$ se tem que $\boldsymbol{c}X \sim N(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{2}})$ | X | |
| Se $X_1 \sim B(5;\ 0.1)$ e $X_2 \sim B(3;\ 0.1)$ são v.a.(s) independentes então $X_1 - X_2 \sim B(2; 0.1)$ | | X |
| Se um processo de Poisson tem taxa média igual a $\lambda$ por unidade de tempo, o tempo médio de espera pela 1ª ocorrência é $\lambda$ | | X |
| Se $X \sim N(2;\ 4)$ e $Y \sim \chi^2_{(10)}$ são v.a.(s) independentes então $(X-2)/\sqrt{Y/10} \sim t(10)$ | | X |

**5.** Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População $X$ de parâmetros desconhecidos.

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| Se $X \sim t_{(n)} \Rightarrow P(X > a) = P(X < -a)\ \forall a \in \mathbb{R}$ | X | |
| $nS^2/\sigma^2$ é uma estatística | | X |
| A variância da média da amostra é igual à variância da população | | X |
| $P(Max\{X_i\} > x) = 1 - [P(X_1 \leq x)]^n$ | X | |

**6.** Seja uma variável aleatória $X \sim Ex(\boldsymbol{\lambda})$ e $c > 0$ uma constante. Prove que $Y = cX \sim Ex\left(\frac{\lambda}{c}\right)$. Justifique todos os passos.[Cotação: 15]

**7.** Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População $X$ com média igual a $\mu$ e $T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ uma estatística. Considere $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ constantes a verificar

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Mostre que $E(T) = \mu$. Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

**1ª Parte - Teórica – 40 minutos V3**

**Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!**

**Nome:**________________________________________________________________________**Número:**_________

**Formulário**

Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$; P2. $P(\Omega) = 1$; P3. Se $A \cap B = \varnothing$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; $F_X(x) = F_{X,Y}(x; +\infty)$

$\mathrm{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$ ; $\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X\left[E(Y \mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X{}^{(r)}(0)$

$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = \left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda > 0, x = 0,1,\cdots)$; $X \sim B(n,\theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n > 1, x = 0,1,\cdots,n)$

$X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x < 0)$; $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ; $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2$ ; $(n-1)S'^2 = n\,S^2$

$X \sim \chi^2_{(n)}$ então $E(X) = n$; $\mathrm{Var}(X) = 2n$; $X \sim N(0;\ 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_{(1)}$; $X \sim G(n;\ \lambda) \Rightarrow 2\lambda X \sim \chi^2_{(2n)}$;

$X \sim N(0;1)\ e\ Y \sim \chi^2_{(n)} \Rightarrow X\Big/\sqrt{Y/n} \sim t_{(n)}$; $P(Max\{X_i\} \leq x) = [F_X(x)]^n$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

**1.** Sejam A e B acontecimentos de um espaço de resultados $\Omega$, com probabilidade positiva. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| A observação da variação diária de um índice de preços no mercado de acções é uma experiência aleatória com espaço de resultados contínuo. | X | |
| Se $A \subset B$ então A e B formam uma partição de $\Omega$. | | X |
| Se $P(A) = 0.4$ e $P(B) = 0.4$ e $P(A\|B) = 0.75$, os acontecimentos A e B não são independentes. | X | |
| $P(B\|A) = P(B)/P(A)$ se e só se $B \subset A$ | X | |

**2.** Seja $X$ uma variável aleatória discreta com função de distribuição $F(x)$, função probabilidade $f(x)$. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| O contradomínio da função probabilidade $f_X(x)$ é $[0;1]$ | X | |
| Se $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ então $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a-0)$ | | X |
| Se a variável aleatória $Y = \varphi(X)$ então $Y$ só pode ser discreta | X | |
| $F(x)$ pode ter uma infinidade de pontos de descontinuidade | X | |

**3.** Seja $(X,Y)$ uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ e $F_X(x)$função distribuição marginal de $X$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| Se $F_{X,Y}(1.5, 2.3) = 1$, então $F_Y(2.3) = 1$ | X | |
| Se $X$ e $Y$ são v.a.(s) independentes então pode concluir-se que $Cov(X,Y) = 0$ | X | |
| Se $X$ e $Y$ são v.a.(s) independentes então $\sqrt{X}$ e $Y^2$ também são v.a.(s) independentes | X | |
| Se $f_{Y\|X=x}(y) = f_Y(y)$ então $X$ e $Y$ são v.a.(s) independentes $\forall(x,y) \in \mathbb{R}$ | X | |

**vsff** →

**4.** Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| Se $X \sim N(1,1)$ então para qualquer constante $\boldsymbol{c}$ se tem que $cX \sim N(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c})$ | | X |
| Se $X_1 \sim B(5;\ 0.1)$ e $X_2 \sim B(5;\ 0.1)$ são v.a.(s) independentes então $X_1 + X_2 \sim B(10; 0.1)$ | X | |
| Se um processo de Poisson tem ritmo igual a $\lambda$ por unidade de tempo, o tempo médio de espera pela 1ª ocorrência é $1/\lambda$. | X | |
| Se $X \sim U(0,1)$ e $0 < a < b < 1$ então $P(X > b \mid X > a) = (1-b)/(1-a)$ | X | |

**5.** Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População $X$ de parâmetros desconhecidos.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| A variância da média da amostra diminui quando aumenta a dimensão da amostra | X | |
| $(X_1 + X_n)/2$ é uma estatística | X | |
| $P\big(X_{(n)} \le x\big) = [P(X_n \le x)]^n$ | X | |
| Se $X \sim N(0, \sigma^2)$ então a média, mediana e moda de $\bar{X}$ são iguais | X | |

**6.** Seja uma variável aleatória $X \sim Ex(\boldsymbol{\lambda})$ e $c > 0$ uma constante. Prove que $Y = cX \sim Ex\left(\frac{\lambda}{c}\right)$. Justifique todos os passos.[Cotação: 15]

**7.** Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$ , uma amostra casual simples retirada de uma População $X$ com média igual a $\mu$ e $T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ uma estatística. Considere $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ constantes a verificar

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Mostre que $E(T) = \mu$. Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

**1ª Parte - Teórica – 40 minutos**

**Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas erradas descontam 0,5. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!**

**Nome:**________________________________________**Número:**_________

**Formulário**

Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$; P2. $P(\Omega) = 1$; P3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; $F_X(x) = F_{X,Y}(x; +\infty)$

$\text{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$; $\text{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$ ; $\text{Var}(aX+bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X[E(Y \mid X)]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X{}^{(r)}(0)$

$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = (e^{-\lambda}\lambda^x)/x!\,(\lambda > 0, x = 0,1,\cdots)$; $X \sim B(n,\theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n > 1, x = 0,1,\cdots,n)$

$X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x < 0)$; $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ; $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \overline{X}^2$ ; $(n-1)S'^2 = n\,S^2$

$X \sim \chi^2_{(n)}$ então $E(X) = n$; $\text{Var}(X) = 2n$; $X \sim N(0;\ 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_{(1)}$; $X \sim G(n;\ \lambda) \Rightarrow 2\lambda X \sim \chi^2_{(2n)}$;

$X \sim N(0;1)$ *e* $Y \sim \chi^2_{(n)} \Rightarrow X\big/\sqrt{Y/n} \sim t_{(n)}$; $P(Max\{X_i\} \leq x) = [F_X(x)]^n$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

**1.** Sejam A,B e C acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados $\Omega$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| O espaço de resultados associado à observação do tempo que um aluno, escolhido ao acaso, leva a resolver um exame é discreto | | X |
| Se $B \subset A$ então A e B formam uma partição de $\Omega$. | | X |
| Se $P(A) = 0.3$ e $P(B) = 0.4$ e $P(A\|B) = 0.75$, os acontecimentos A e B são incompatíveis | | X |
| $P(B\|A) = 1$ se e só se $A \subset B$ | X | |

**2.** Seja $X$ uma variável aleatória mista com função de distribuição $F(x)$, função densidade $f(x)$
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| O conjunto $\{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\} = \emptyset$ | | X |
| Se $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ e $b$ ponto descontinuidade de $F_X(x)$então $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a-0)$ | | X |
| Se a variável aleatória $Y = \varphi(X)$ então $Y$ não pode ser discreta | | X |
| $F(x)$ é contínua em todo o seu domínio | | X |

**3.** Seja $(X,Y)$ uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ e $F_X(x)$função distribuição marginal de $X$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| Se $F_{X,Y}(1.5, 2.3) = 1$, então $F_X(1.5) = 1$ | X | |
| Se $Cov(X,Y) = 0$ nada se pode concluir-se sobre a independência das v.a.(s) $X$ e $Y$ | X | |
| Se $X$ e $Y$ são v.a.(s) independentes então $X^2$ e $\sqrt{Y}$ também são v.a.(s) independentes | X | |
| Se $f_{Y\|X=x}(y) = f_X(x)$ então $X$ e $Y$ são v.a.(s) independentes $\forall(x,y) \in \mathbb{R}$ | | X |

vsff →

**4.** Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| Se $X \sim N(1{,}1)$ então para qualquer constante $\boldsymbol{c}$ se tem que $\boldsymbol{c}X \sim N(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c^2})$ | X | |
| Se $X_1 \sim B(5;\ 0.1)$ e $X_2 \sim B(3;\ 0.5)$ são v.a.(s) independentes então $X_1 - X_2 \sim B(2; -0.4)$ | | X |
| Se um processo de Poisson tem taxa média igual a $\lambda$ por unidade de tempo, o tempo médio de espera pela 1ª ocorrência é $\lambda$ | | X |
| Se $X \sim N(2; 1)$ e $Y \sim \chi^2_{(10)}$ são v.a.(s) independentes então $(X-2)/\sqrt{Y/10} \sim t(10)$ | X | |

**5.** Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População $X$ de parâmetros desconhecidos.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

| | V | F |
|---|---|---|
| Se $X \sim t_{(n)}$ então a média, mediana e moda de $X$ são iguais a zero | X | |
| $(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ é uma estatística | | X |
| A variância da média da amostra é inferior à variância da população | X | |
| $P(Max\{X_i\} > x) = 1 - [P(X_n \leq x)]^n$ | X | |

**6.** Seja uma variável aleatória $X \sim Ex(\boldsymbol{\lambda})$ e $c > 0$ uma constante. Prove que $Y = cX \sim Ex\left(\frac{\lambda}{c}\right)$. Justifique todos os passos.[Cotação: 15]

**7.** Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$ , uma amostra casual simples retirada de uma População $X$ com média igual a $\mu$ e $T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ uma estatística. Considere $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ constantes a verificar

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Mostre que $E(T) = \mu$. Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

# ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças-1ºSem. 2012-2013 18. 01. 13
## Exame Época Normal
## 2ª Parte – Prática – 80 minutos

**Nome:**__________________________________________________________**Número:**________

**Espaço reservado para classificações**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1a.(20) | 2a.(15) | 2c.(15) | 3a.(10) | 3c.(20) | T: |
| 1b.(10) | 2b.(20) | | 3b. (10) | | P: |

**1.** Da análise do mercado de acções concluiu-se que 25% das empresas tiveram um desempenho melhor do que a média do mercado ($E_M$), 50% tiveram um desempenho igual à média do mercado ($E_I$), 25% tiveram um desempenho pior do que a média do mercado ($E_P$)? Quarenta por cento das acções que tiveram um desempenho melhor do que a média do mercado foram classificadas como "boa compra" ($A$), assim como 20% das que tiveram um desempenho igual à média do mercado e 10% das que tiveram um desempenho pior do que a média do mercado.

**a)** Qual é a probabilidade de que uma acção avaliada como "boa compra" tenha tido um desempenho melhor que a média?

$$P(E_M|B) = 0.444$$

**b)** Seleccionadas 20 empresas qual a probabilidade de que no mínimo 6 tenham tido um desempenho melhor do que a média do mercado?

**0.3828** ☐ 0.2142 ☐ 0.8314 ☐ 0.7977 ☐

**2.** Seja $(X,Y)$ um vector aleatório que representa para cada uma das famílias, residentes numa determinada zona, o número de filhos na família ($X$) e o número de assoalhadas do respectivo alojamento ($Y$). A função probabilidade conjunta é dada por:

| $Y \quad \backslash \quad X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_Y(y)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.04 | 0.05 | 0.02 | 0 | 0 | 0,11 |
| 3 | 0.05 | 0.09 | 0.14 | 0.04 | 0.01 | 0,33 |
| 4 | 0.02 | 0.09 | 0.17 | 0.06 | 0.04 | 0,38 |
| 5 | 0 | 0.03 | 0.05 | 0.07 | 0.03 | 0,18 |
| $f_X(x)$ | 0,11 | 0,26 | 0,38 | 0,17 | 0,08 | |

**a)** Qual a percentagem de famílias que vive em alojamentos com mais de 2 assoalhadas nessa zona? Qual o número médio de assoalhadas do alojamento das famílias que tem 2 filhos?

$$P(Y > 2) = 0.89$$

$$E(Y|X = 2) = 3.658$$

**b)** Pode dizer-se que o número de assoalhadas do alojamento é independente do número de filhos da família que o habita? Justifique devidamente.

$$X, Y \text{ são } v.a.(s) \text{ nao sao independentes}$$

**c)** Se se seleccionar aleatoriamente 10 famílias, nessa zona, qual a probabilidade de a família com menor número de filhos, ter no máximo 1 filho?

n=10 P(Min{$X_i$}<=1)=0.9902

**3.** A chegada de camiões ao MARL entre as 5:00-8:00 segue um processo de Poisson com ritmo 20 por hora.

**a)** Determine a probabilidade de na primeira hora chegarem menos de 10 camiões.

0.0058 ☐ 0.0108 ☐ 0.0029 ☐ **0.005** ☐

**b)** Qual a probabilidade de o primeiro camião chegar depois das 5:10?

0.0293 ☐ 0.1889 ☐ 0.9643 ☐ **0.0357** ☐

**c1)** Qual a probabilidade de decorrer mais de meia hora até que chegue o 5º camião?

$$P(Y > 1/2) = 0.0293$$

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças-1ºSem. 2012-2013 **18. 01. 13**

**Exame Época Normal**

**2ª Parte – Prática – 80 minutos**

**Nome:**______________________________________________________________________**Número:**________

**Espaço reservado para classificações**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1a.(20) | 2a.(15) | 2c.(15) | 3a.(10) | 3c.(20) | T: |
| 1b.(10) | 2b.(20) | | 3b. (10) | | P: |

**1.** Da análise do mercado de acções concluiu-se que 25% das empresas tiveram um desempenho melhor do que a média do mercado ($E_M$), 50% tiveram um desempenho igual à média do mercado ($E_I$), 25% tiveram um desempenho pior do que a média do mercado ($E_P$)? Quarenta por cento das acções que tiveram um desempenho melhor do que a média do mercado foram classificadas como "boa compra" ($A$), assim como 20% das que tiveram um desempenho igual à média do mercado e 10% das que tiveram um desempenho pior do que a média do mercado.

**a)** Qual é a probabilidade de que uma acção avaliada como "boa compra" tenha tido um desempenho melhor que a média?

**b)** Seleccionadas 20 empresas qual a probabilidade de que no mínimo 6 tenham tido um desempenho pior do que a média do mercado?

0.2142 ☐ **0.3828** ☐ 0.8314 ☐ 0.7977 ☐

**2.** Seja $(X,Y)$ um vector aleatório que representa para cada uma das famílias, residentes numa determinada zona, o número de filhos na família $(X)$ e o número de assoalhadas do respectivo alojamento $(Y)$. A função probabilidade conjunta é dada por:

| $Y \quad \backslash \quad X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.04 | 0.05 | 0.02 | 0 | 0 |
| 3 | 0.05 | 0.09 | 0.14 | 0.04 | 0.01 |
| 4 | 0.02 | 0.09 | 0.17 | 0.06 | 0.04 |
| 5 | 0 | 0.03 | 0.05 | 0.07 | 0.03 |

**a)** Qual a percentagem de famílias que vive em alojamentos com mais de 2 assoalhadas nessa zona? Qual o número médio de assoalhadas do alojamento das famílias que tem 2 filhos?

**b)** Pode dizer-se que o número de assoalhadas do alojamento é independente do número de filhos da família que o habita? Justifique devidamente.

**c)** Se se seleccionar aleatoriamente 10 famílias, nessa zona, qual a probabilidade de a família com menor número de filhos, ter no máximo 1 filho?

**3.** A chegada de camiões ao MARL entre as 5:00-8:00 segue um processo de Poisson com ritmo 10 por hora.

**a)** Determine a probabilidade de na primeira hora chegarem menos de 5 camiões.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.0189 ☐ | **0.0293** ☐ | 0.0671 ☐ | 0.0378 ☐ |

**b)** Qual a probabilidade de o primeiro camião chegar depois das 5:05?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.0293 ☐ | 0.2865 ☐ | **0.4346** ☐ | 0.5654 ☐ |

**c)** Qual a probabilidade de decorrer mais de meia hora até que chegue o 5º camião?

$$Y - tempo\ até\ à\ chegada\ do\ 5º\ camião \sim G(5,10)$$

$$P(Y > 1/2) = P\left(2\lambda Y > 2 \times 10 \times \frac{1}{2}\right) = P\left(\chi^2_{(10)} > 10\right) = 0.4405$$

**ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças-1ºSem. 2012-2013** **18. 01. 13**

**Exame Época Normal**

**2ª Parte – Prática – 80 minutos**

**Nome:**__________________________________________________________________**Número:**________

**Espaço reservado para classificações**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1a.(20) | 2a.(15) | 2c.(15) | 3a.(10) | 3c.(20) | T: |
| 1b.(10) | 2b.(20) | | 3b. (10) | | P: |

**1.** Da análise do mercado de acções concluiu-se que 25% das empresas tiveram um desempenho melhor do que a média do mercado ($E_M$), 50% tiveram um desempenho igual à média do mercado ($E_I$), 25% tiveram um desempenho pior do que a média do mercado ($E_P$)? Quarenta por cento das acções que tiveram um desempenho melhor do que a média do mercado foram classificadas como "boa compra" ($A$), assim como 20% das que tiveram um desempenho igual à média do mercado e 10% das que tiveram um desempenho pior do que a média do mercado.

**a)** Qual é a probabilidade de que uma acção avaliada como "boa compra" tenha tido um desempenho melhor que a média?

**b)** Seleccionadas 20 empresas qual a probabilidade de que no mínimo 6 tenham tido um desempenho melhor do que a média do mercado?

0.7977 ☐ 0.2142 ☐ 0.8314 ☐ **0.3828** ☐

**2.** Seja $(X, Y)$ um vector aleatório que representa para cada uma das famílias, residentes numa determinada zona, o número de filhos na família ($X$) e o número de assoalhadas do respectivo alojamento ($Y$). A função probabilidade conjunta é dada por:

| $Y \setminus X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.04 | 0.05 | 0.02 | 0 | 0 |
| 3 | 0.05 | 0.09 | 0.14 | 0.04 | 0.01 |
| 4 | 0.02 | 0.09 | 0.17 | 0.06 | 0.04 |
| 5 | 0 | 0.03 | 0.05 | 0.07 | 0.03 |

**a)** Qual a percentagem de famílias que vive em alojamentos com mais de 2 assoalhadas nessa zona? Qual o número médio de assoalhadas do alojamento das famílias que tem 2 filhos?

**b)** Pode dizer-se que o número de assoalhadas do alojamento é independente do número de filhos da família que o habita? Justifique devidamente.

**c)** Se se seleccionar aleatoriamente 10 famílias, nessa zona, qual a probabilidade de a família com menor número de filhos, ter no máximo 1 filho?

**3.** A chegada de camiões ao MARL entre as 5:00-8:00 segue um processo de Poisson com ritmo 20 por hora.

**a)** Determine a probabilidade de na primeira hora chegarem menos de 10 camiões.

**0.005** ☐ 0.0108 ☐ 0.0029 ☐ 0.0058 ☐

**b)** Qual a probabilidade de o primeiro camião não chegar antes das 5:05?

0.2865 ☐ **0.1889** ☐ 0.8111 ☐ 0.4346 ☐

**c)** Qual a probabilidade de decorrer mais de meia hora até que chegue o 5º camião?

$$Y - tempo\ até\ à\ chegada\ do\ 5º\ camião \sim G(5,20)$$

$$P(Y > 1/2) = P\left(2\lambda Y > 2 \times 20 \times \frac{1}{2}\right) = P\left(\chi^2_{(10)} > 20\right) = 0.4405$$

**ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças-1ºSem. 2012-2013** **18. 01. 13**

**Exame Época Normal**

**2ª Parte – Prática – 80 minutos**

**Nome:**__________________________________________________________________**Número:**________

**Espaço reservado para classificações**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1a.(20) | 2a.(15) | 2c.(15) | 3a.(10) | 3c.(20) | T: |
| 1b.(10) | 2b.(20) | | 3b.(10) | | P: |

**1.** Da análise do mercado de acções concluiu-se que 25% das empresas tiveram um desempenho melhor do que a média do mercado ($E_M$), 50% tiveram um desempenho igual à média do mercado ($E_I$), 25% tiveram um desempenho pior do que a média do mercado ($E_P$)? Quarenta por cento das acções que tiveram um desempenho melhor do que a média do mercado foram classificadas como "boa compra" ($A$), assim como 20% das que tiveram um desempenho igual à média do mercado e 10% das que tiveram um desempenho pior do que a média do mercado.

**a)** Qual é a probabilidade de que uma acção avaliada como "boa compra" tenha tido um desempenho melhor que a média?

**b)** Seleccionadas 20 empresas qual a probabilidade de que no mínimo 6 tenham tido um desempenho igual à média do mercado?

0.9630 ☐ 0.9852 ☐ 0.9423 ☐ **0.9793** ☐

**2.** Seja $(X, Y)$ um vector aleatório que representa para cada uma das famílias, residentes numa determinada zona, o número de filhos na família $(X)$ e o número de assoalhadas do respectivo alojamento $(Y)$. A função probabilidade conjunta é dada por:

| $Y \setminus X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.04 | 0.05 | 0.02 | 0 | 0 |
| 3 | 0.05 | 0.09 | 0.14 | 0.04 | 0.01 |
| 4 | 0.02 | 0.09 | 0.17 | 0.06 | 0.04 |
| 5 | 0 | 0.03 | 0.05 | 0.07 | 0.03 |

**a)** Qual a percentagem de famílias que vive em alojamentos com mais de 2 assoalhadas nessa zona? Qual o número médio de assoalhadas do alojamento das famílias que tem 2 filhos?

**b)** Pode dizer-se que o número de assoalhadas do alojamento é independente do número de filhos da família que o habita? Justifique devidamente.

**c)** Se se seleccionar aleatoriamente 10 famílias, nessa zona, qual a probabilidade de a família com menor número de filhos, ter no máximo 1 filho?

**3.** A chegada de camiões ao MARL entre as 5:00-8:00 segue um processo de Poisson com ritmo 15 por hora.

**a)** Determine a probabilidade de na primeira hora chegarem menos de 10 camiões.

0.0486 ☐ 0.0324 ☐ **0.0699** ☐ 0.1185 ☐

**b)** Qual a probabilidade de o primeiro camião não chegar antes das 5:05?

**0.2865** ☐ 0.7135 ☐ 0.8111 ☐ 0.4346 ☐

**c)** Qual a probabilidade de decorrer mais de meia hora até que chegue o 5º camião?

$$Y - tempo\ até\ à\ chegada\ do\ 5º\ camião \sim G(5,15)$$

$$P(Y > 1/2) = P\left(2\lambda Y > 2 \times 15 \times \frac{1}{2}\right) = P\left(\chi^2_{(10)} > 15\right) = 0.1321$$