ISEG **ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 1º semestre, ER** **25. 01. 12**

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\ge 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\emptyset$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\text{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\text{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY)=a^2\text{Var}(X)+b^2\text{Var}(Y)+2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0, x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1, x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\ (x<0)$; $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\overline{X}^2$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\text{Var}(X)=2n$; $M_X(s)=(1-2s)^{-n/2}, s<\dfrac{1}{2}$; $\gamma_1=\sqrt{8/n}$; $\gamma_2=3+12/n$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
Se $P(A)=0.55, P(B)=0.45, P(A-B)=0.25$ então A e B constituem uma partição de Ω		X
$P(A\cup B)=P(B)$ se e só se $A\subset B$	X	
Seja $\{A,B\}$ uma partição de Ω e o acontecimento $C\subset\Omega$ então $P(C)=P(C\mid A)P(A)+P(C\mid B)P(B)$	X	
Se $P(A\cap B)=P(B)$ então $P(B)\le P(A)$	X	

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F_X(x)$, D_X o conjunto de pontos de descontinuidade de $F_X(x)$ e $a\in\Re$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
Se $F_X(x)$ é contínua à esquerda em todo $x\in\Re$ então X pode ser uma v.a. contínua	X	
Se X é uma v.a. contínua então $P(X<a)=F_X(a)$	X	
Se $D_X=\emptyset$ então X é uma v.a. contínua	X	
Se X é uma v.a. contínua, $F(x)$ pode assumir valores superiores a 1		X

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
O percentil 75 da distribuição da v.a. X é o valor k tal que $F_X(k)=0.25$		X
Se existe $E(X)$ e $E(Y)$ então $E(XY)$ existe sempre		X
Se X e Y forem independentes pode-se garantir que $\rho_{X,Y}=0$	X	
Se X e Y forem dependentes então $Var(X-2Y)=Var(X)+2Var(Y)-2Cov(X,Y)$		X

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com* ***X*** *na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim U(a, a+1), a > 0$ então a mediana da distribuição de X é $\mu_e = 1/2$		X
Seja $X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow P(X \leq \sigma) < 1/2$		X
Seja X v.a. que representa o número de ocorrências num processo de Poisson com taxa média λ, então Y, tempo de espera pela 1ª ocorrência, tem distribuição exponencial de média $1/\lambda$	X	
Se $X \sim B(n, \theta), n < 20, \theta \leq 0{,}001$ então a distribuição de $Po(n\theta)$ constitui uma boa aproximação à distribuição de X		**X**

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de um População X com parâmetros desconhecidos. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), *assinalando com X na quadrícula respectiva*:

	V	F
A variância da população é uma variável aleatória		**X**
$X_1 + X_n$ é uma estatística	X	
Se $n \geq 30$ e $X \sim Po(\lambda)$ então $\frac{\bar{X} - \lambda}{\lambda/n} \dot{\sim} N(0; 1)$		X
Então $\forall\, x \in$ ▯$, P(X_1 < x,\ X_n < x) = [F(x)]^2$	X	

6. Seja X uma variável aleatória discreta com função probabilidade $f_X(x)$.

Demonstre que $E[\psi_1(X) + \psi_2(X)] = E[\psi_1(X)] + E[\psi_2(X)]$ [Cotação: 15]

RES:

$$E[\psi_1(X) + \psi_2(X)] = \sum_{x \epsilon D_X} \big(\psi_1(X) + \psi_2(X)\big) f_X(x) = \sum_{x \epsilon D_X} \psi_1(X) f_X(x) + \psi_2(X) f_X(x) =:$$

$$= \sum_{x \epsilon D_X} \psi_1(X) f_X(x) + \sum_{x \epsilon D_X} \psi_2(X) f_X(x) = E[\psi_1(X)] + E[\psi_2(X)]$$

7. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual extraída de um População X com

$\mu = E(X_i)$ e $\sigma^2 = Var(X_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Prove que $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ [Cotação: 15]

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \overset{*}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_i) \overset{**}{=} \frac{1}{n^2} n Var(X) =$$

$$= \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

- Porque X_i são elementos de uma amostra aleatória e como tal são v.a.(s) independentes

** Porque X_i são identicamente distribuídos a X

ISEG | ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 1º semestre, ER
25. 01. 12

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\emptyset$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\mathrm{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$;

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1,x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}$ $(x<0)$; $\bar{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\bar{X}^2$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\mathrm{Var}(X)=2n$; $M_X(s)=(1-2s)^{-n/2}, s<\dfrac{1}{2}$; $\gamma_1=\sqrt{8/n}$; $\gamma_2=3+12/n$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $P(A)=0.55, P(B)=0.35, P(A\|B)=0$ então A e B constituem uma partição de Ω		X
$P(A\cup B)=P(A)$ se e só se $A\subset B$		X
Seja $\{A,B\}$ uma partição de Ω e o acontecimento $C\subset\Omega$ então $P(C)=P(A\|C)P(C)+P(B\|C)P(C)$		X
Se $P(A\cap B)=P(A)$ então $P(A)\leq P(B)$	X	

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F_X(x)$, D_X o conjunto de pontos de descontinuidade de $F_X(x)$ e $a\in\Re$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $F_X(x)$ é estritamente crescente e contínua à esquerda excepto em algum $x\in\Re$ então X é uma v.a. mista	X	
Se X é uma v.a. contínua então $P(X\leq a)=F_X(a)$	X	
Se $D_X\neq\emptyset$ então X é uma v.a. discreta ou mista.	X	
$F(x)$ nunca pode assumir valores superiores a 1	X	

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O percentil 75 da distribuição da v.a. X é o valor k tal que $P(X>k)=0{,}25$	X	
Se $Cov(X,Y)=3$, X e Y não são independentes	X	
$Var(X-2Y)=Var(X)+2Var(Y)$ se e só se X e Y forem independentes		X
Existindo $E(X)$ e $E(Y)$ pode não existir $E(XY)$	X	

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
Se $X \sim U(0,2a)$ $\ a > 0$ então a mediana da distribuição de X é $\mu_e = a$	X	
Seja $X \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow P(X \leq \sigma) > 1/2$	X	
Seja X v.a. que representa o número de ocorrências num processo de Poisson com taxa média λ, então Y, tempo de espera pela 5ª ocorrência, tem distribuição Gama de média $5/\lambda$.	X	
Se $X \sim B(n,\theta), n \geq 3000, \theta \geq 0{,}5$ então a distribuição de $Po(n\theta)$ constitui uma boa aproximação à distribuição de X.		X

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de um População X com parâmetros desconhecidos. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
Os parâmetros da população são variáveis aleatórias		X
$(\bar{X} - \mu)/_{\sigma}$ é uma estatística		X
Se $n \geq 30$ e $X \sim Po(\lambda)$ então $\frac{\bar{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \dot{\sim} N(0;1)$	X	
Então $\forall\, x \in$ ▯$, P(X_1 > x,\ X_n > x) = [1 - F(x)]^2$	X	

6. Seja X uma variável aleatória discreta com função probabilidade $f_X(x)$.

Demonstre que $E[\psi_1(X) + \psi_2(X)] = E[\psi_1(X)] + E[\psi_2(X)]$ [Cotação: 15]

7. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual extraída de um População X com

$\mu = E(X_i)$ e $\sigma^2 = Var(X_i)$ $\ (i = 1,2,\cdots,n)$. Prove que $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ [Cotação: 15]

ISEG ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 1º semestre, ER 25. 01. 12

1ª Parte - Teórica – 40 minutos V3

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\ge 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\mathrm{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1,x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\ (x<0)$; $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\overline{X}^2$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\mathrm{Var}(X)=2n$; $M_X(s)=(1-2s)^{-n/2}, s<\dfrac{1}{2}$; $\gamma_1=\sqrt{8/n}$; $\gamma_2=3+12/n$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

1 Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
Se $P(A)=0.55, P(B)=0.35, P(A-B)=0.55$ então A e B constituem uma partição de Ω		X
$P(A\cup B)=P(B)$ se e só se $B\subset A$		X
Seja $\{A,B\}$ uma partição de Ω e o acontecimento $C\subset\Omega$ então $P(C)=P(C\|A)P(A)+P(C\|B)P(B)$	X	
Se $P(A\cap B)=P(B)$ então $P(B)\ge P(A)$		X

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F_X(x)$, D_X o conjunto de pontos de descontinuidade de $F_X(x)$ e $a\in\Re$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
X é variável aleatória discreta se e só se $P(X\in D_X)=1$	X	
Se X é uma v.a. discreta então $P(X<a)=F_X(a-0)$	X	
Se X é uma v.a. discreta então D_X pode não ser finito	X	
Se X é uma variável aleatória mista, $F(x)$ pode assumir valores superiores a 1 nos pontos de descontinuidade de $F(x)$		X

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	**F**
O percentil 25 da distribuição da v.a. X é o valor k tal que $F_X(k)=0.25$	X	
Se $Cov(X,Y)=0$, X e Y são independentes		X
A existência de $E(X)$ e $E(Y)$ não garante a existência de $E(XY)$	X	
Se X e Y forem dependentes então $Var(X-2Y)=Var(X)-2Var(Y)-2Cov(X,Y)$		X

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim U(-a, a),\ a > 0,$ então a mediana da distribuição de X é $\mu_e = 0$	X	
Seja $X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow P(X \geq \sigma) > 1/2$		X
Se $X \sim B(n, \theta), n \geq 3000, \theta \leq 0{,}001$ então a distribuição de $Po(n\theta)$ constitui uma boa aproximação à distribuição de X.	X	
Seja X v.a. que representa o número de ocorrências num processo de Poisson com taxa média λ, então Y ,tempo de espera entre ocorrências consecutivas, tem distribuição exponencial de média $1/\lambda$	X	

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População X com parâmetros desconhecidos. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
A média da população é uma variável aleatória		X
$\bar{X} - \mu$ é uma estatística		X
Se $n \geq 30$ e $X \sim B(1; \theta)$ então $\frac{\bar{X}-\theta}{\theta(1-\theta)/n} \dot{\sim} N(0; 1)$		X
Então $\forall\ x \in$ ▯$, P(X_1 > x,\ X_n > x) = 1 - [1 - F(x)]^2$		X

6. Seja X uma variável aleatória discreta com função probabilidade $f_X(x)$.

Demonstre que $E[\psi_1(X) + \psi_2(X)] = E[\psi_1(X)] + E[\psi_2(X)]$ [Cotação: 15]

7. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual extraída de um População X com

$\mu = E(X_i)$ e $\sigma^2 = Var(X_i)$ $(i = 1,2, \cdots, n)$. Prove que $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ [Cotação: 15]

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$ P2. $P(\Omega) = 1$ P3. Se $A \cap B = \varnothing$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\text{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$; $\text{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X\left[E(Y \mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X{}^{(r)}(0)$

$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = \left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x\,!\,(\lambda > 0, x = 0,1,\cdots)$; $X \sim B(n,\theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n > 1, x = 0,1,\cdots,n)$

$X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x < 0)$; $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2$; $(n-1)S'^2 = n\,S^2$

$X \sim \chi^2_{(n)}$ então $E(X) = n$; $\text{Var}(X) = 2n$; $M_X(s) = (1-2s)^{-n/2}, s < \dfrac{1}{2}$; $\gamma_1 = \sqrt{8/n}$; $\gamma_2 = 3 + 12/n$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $P(A) = 0.55, P(B) = 0.45, P(A\|B) = 0$ então A e B constituem uma partição de Ω	X	
$P(A \cup B) = P(A)$ se e só se $B \subset A$	X	
Seja $\{A, B\}$ uma partição de Ω e o acontecimento $C \subset \Omega$ então $P(C) = P(A\|C)P(A) + P(B\|C)P(B)$		X
Se $P(A \cap B) = P(A)$ então $P(B) \leq P(A)$		X

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F_X(x)$, D_X o conjunto de pontos de descontinuidade de $F_X(x)$ e $a \in \Re$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $F_X(x)$ é estritamente crescente e contínua à esquerda excepto em algum $x \in \Re$ então X é uma v.a. mista	X	
Se X é uma v.a. discreta então $P(X < a) = F_X(a)$		X
Se X é uma v.a. contínua então D_X é um intervalo de $\Re$		X
$F(x)$ nunca pode assumir valores inferiores a 0	X	

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O percentil 25 da distribuição da v.a. X é o valor k tal que $P(X > k) = 0.75$	X	
Se X e Y são independentes então $Cov(X,Y) = 0$,	X	
$Var(X - 2Y) = Var(X) - 4Var(Y)$ se e só se X e Y forem independentes		X
A existência de $E(X)$ e $E(Y)$ garante a existência de $E(XY)$		X

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim U(-a, a+1)$, então a mediana da distribuição de X é $\mu_e = 1$		X
Seja $X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow P(X \geq \sigma) < 1/2$	X	
Seja X v.a. que representa o número de ocorrências num processo de Poisson com taxa média λ, então Y, tempo de espera pela 5ª ocorrência, tem distribuição exponencial de média $5/\lambda$	X	
Se $X \sim B(n, \theta), n \leq 30, \theta \geq 0{,}5$ então a distribuição de $Po(n\theta)$ constitui uma boa aproximação à distribuição de X.		X

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População X com parâmetros desconhecidos. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Os parâmetros da população são variáveis aleatórias		X
$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ é uma estatística	X	
Se $n \geq 30$ e $X \sim B(1; \theta)$ então $\frac{\bar{X}-\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)/n}} \dot{\sim} N(0; 1)$	X	
Então $\forall\, x \in$ ▯, $P(X_1 < x, X_n > x) = F(x) - [F(x)]^2$	X	

6. Seja X uma variável aleatória discreta com função probabilidade $f_X(x)$.

Demonstre que $E[\psi_1(X) + \psi_2(X)] = E[\psi_1(X)] + E[\psi_2(X)]$ [Cotação: 15]

7. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual extraída de um População X com

$\mu = E(X_i)$ e $\sigma^2 = Var(X_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Prove que $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ [Cotação: 15]

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – 1º sem 2011-2012 **25. 01. 12**

Exame Época Recurso

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1.(20)	3a.(10)	4a.(10)	4c.(15)	5a.(10)	T:
2.(10)	3b.(15)	4b.(10)		5b.(20)	P:

1. A audiência a um dado espectáculo tem a seguinte composição: 50% de portugueses (A_1), 30% de espanhóis (A_2), restantes são pessoas provenientes de outras origens (A_3). Sabe-se que 30% dos português.es são homens, 75% dos espanhóis são mulheres, e 50% de pessoas provenientes de outras origens são mulheres. O artista pede aos homens presentes que se levantem e escolhe aleatoriamente um para participar no espectáculo.
Qual a probabilidade de ser escolhido um português?

$$P(A_1|H) = 0{,}4615$$

2. O número de pessoas que chegam por hora em determinado serviço público segue um processo de Poisson com intensidade média igual a 10.
Determine a probabilidade de em meia hora chegarem menos de 8 pessoas.

0.9319 ☐ 0.1044 ☐ 0.0653 ☐ 0.8666 X

3. Uma loja vende dois produtos A e B. Seja X a procura diária de A e Y a procura diária de B. A função probabilidade conjunta de X e Y é dada por:

X \ Y	0	1	2	3	$f_X(x)$
0	0.1	0.05	0.1	0.05	0.3
1	0.1	0.15	0.15	0.1	0.5
2	0.02	0.03	0.1	0.05	0.2
$f_Y(y)$	0.22	0.23	0.35	0.2	

a) Construa as funções probabilidade marginais na tabela acima. O que pode concluir sobre a independência das variáveis aleatórias X e Y? Justifique.

X e Y não são independentes

b) Calcule o número médio de unidades do produto B procuradas num dia em que a procura do produto A foi de 2 unidades.

$$E(Y|X = 2) = 1.9$$

4. A vida útil (em milhares de kms) de um pneu de determinada marca tem distribuição normal de média 45 e desvio padrão 8.

a) Qual a probabilidade de um pneu dessa marca, escolhido ao acaso, durar menos de 55 mil kms?.

0.1057 ☐ 0.9696 ☐ 0.2660 ☐ 0.8944 X

b) Num carro equipado com 4 pneus dessa marca qual a probabilidade de que pelo menos 3 durem menos de 45 mil kms.

0.3125 X 0.625 ☐ 0.0625 ☐ 0.75 ☐

c) Numa amostra aleatória de 5 pneus qual a probabilidade de a duração mínima ser inferior à média da população.

$$P\left(X_{(1)} < \mu\right) = 0.9688$$

5. Seja X a variável aleatória que representa, em **centenas** de euros, o lucro de uma operação comercial e cuja função densidade de probabilidade é :

$$f_X(x) = 1/8 \quad (-2 < x < 6)$$

a) Determine a probabilidade de a operação ter tido lucro.

$$P(X > 0) = \frac{3}{4}$$

b) Sabe-se que a operação teve um lucro inferior a 200 euros, qual a probabilidade de ter sido superior a 100 euros?

$$P(X > 1|X < 2) = \frac{1}{4}$$

.

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – 1º sem 2011-2012 **25. 01. 12**

Exame Época Recurso

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1.(20)	3a.(10)	4a.(10)	4c.(15)	5a.(10)	T:
2.(10)	3b.(15)	4b.(10)		5b.(20)	P:

1. A audiência a um dado espectáculo tem a seguinte composição: 50% de portugueses (A1), 30% de espanhóis (A2), restantes são pessoas provenientes de outras origens (A3). Sabe-se que 30% dos portugueses são homens, 75% dos espanhóis são mulheres, e 50% de pessoas provenientes de outras origens são mulheres. O artista pede aos homens presentes que se levantem e escolhe aleatoriamente um para participar no espectáculo. Qual a probabilidade de ser escolhido um português?

2. O número de pessoas que chegam por hora em determinado serviço público segue um processo de Poisson com intensidade média igual a 10.

Determine a probabilidade de em meia hora chegarem menos de 9 pessoas.

0,0363 ☐ 0.9319 X 0.0653 ☐ 0.9682 ☐

3. Uma loja vende dois produtos A e B. Seja X a procura diária de A e Y a procura diária de B. A função probabilidade conjunta de X e Y é dada por:

X \ Y	0	1	2	3	
0	0.1	0.05	0.1	0.05	
1	0.1	0.15	0.15	0.1	
2	0.02	0.03	0.1	0.05	

a) Construa as funções probabilidade marginais na tabela acima. O que pode concluir sobre a independência das variáveis aleatórias X e Y? Justifique.

a. Calcule o número médio de unidades do produto B procuradas num dia em que a procura do produto A foi de 2 unidades

.

4. A vida útil (em milhares de kms) de um pneu de determinada marca tem distribuição normal de média 45 e desvio padrão 8.

a) Qual a probabilidade de um pneu dessa marca, escolhido ao acaso, durar menos de 60 mil kms?.

0.8944 ☐ 0.1057 ☐ 0.9696 X 0.2660 ☐

b) Num carro equipado com 4 pneus dessa marca qual a probabilidade de que pelo menos 2 durem menos de 45 mil kms.

0.625 ☐ 0.6875 X 0.312☐ 0.7☐

c) Numa amostra aleatória de 5 pneus qual a probabilidade de a duração mínima ser inferior à média da população.

5. Seja X a variável aleatória que representa, em **centenas** de euros, o lucro de uma operação comercial e cuja função densidade de probabilidade é :

$$f_X(x) = 1/8 \quad (-2 < x < 6)$$

a) Determine a probabilidade de a operação ter tido lucro.

b) Sabe-se que a operação teve um lucro inferior a 200 euros, qual a probabilidade de ter sido superior a 100 euros?

.

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – 1º sem 2011-2012 **25. 01. 12**

Exame Época Recurso

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1.(20)	3a.(10)	4a.(10)	4c.(15)	5a.(10)	T:
2.(10)	3b.(15)	4b.(10)		5b.(20)	P:

1. A audiência a um dado espectáculo tem a seguinte composição: 50% de portugueses (A1), 30% de espanhois (A2), restantes são pessoas provenientes de outras origens (A3). Sabe-se que 30% dos portugueses são homens, 75% dos espanhois são mulheres, e 50% de pessoas provenientes de outras origens são mulheres. O artista pede aos homens presentes que se levantem e escolhe aleatoriamente um para participar no espectáculo. Qual a probabilidade de ser escolhido um português?

2. O número de pessoas atendidas por hora em determinado serviço público tem distribuição de Poisson com média igual a 10.

Determine a probabilidade de em duas horas chegarem menos de 15 pessoas.

0.1565 ☐ 0.0516 ☐ 0.1049 X 0.0387 ☐

3. Uma loja vende dois produtos A e B. Seja X a procura diária de A e Y a procura diária de B. A função probabilidade conjunta de X e Y é dada por:

X \ Y	0	1	2	3	
0	0.1	0.05	0.1	0.05	
1	0.1	0.15	0.15	0.1	
2	0.02	0.03	0.1	0.05	

a) Construa as funções probabilidade marginais na tabela acima. O que pode concluir sobre a independência das variáveis aleatórias X e Y? Justifique.

b) Calcule o número médio de unidades do produto B procuradas num dia em que a procura do produto A foi de 2 unidades.

4. A vida útil (em milhares de kms) de um pneu de determinada marca tem distribuição normal de média 45 e desvio padrão 8.

a) Qual a probabilidade de um pneu dessa marca, escolhido ao acaso, durar menos de 40 mil kms?.

0.8944 ☐ 0.2660 X 0.9696☐ 0.1057☐

b) Num carro equipado com 4 pneus dessa marca qual a probabilidade de que pelo menos 3 durem mais de 45 mil kms.

0.3125 X 0.625 ☐ 0.0625 ☐ 0.75 ☐

c) Numa amostra aleatória de 5 pneus qual a probabilidade de a duração mínima ser inferior à média da população.

5. Seja X a variável aleatória que representa, em **centenas** de euros, o lucro de uma operação comercial e cuja função densidade de probabilidade é :

$$f_X(x) = 1/8 \quad (-2 < x < 6)$$

a) Determine a probabilidade de a operação ter tido lucro.

b) Sabe-se que a operação teve um lucro inferior a 200 euros, qual a probabilidade de ter sido superior a cem euros?

.

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – 1º sem 2011-2012 **25. 01. 12**

Exame Época Recurso

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1.(20)	3a.(10)	4a.(10)	4c.(15)	5a.(10)	T:
2.(10)	3b.(15)	4b.(10)		5b.(20)	P:

1. A audiência a um dado espectáculo tem a seguinte composição: 50% de portugueses (A1), 30% de espanhóis (A2), restantes são pessoas provenientes de outras origens (A3). Sabe-se que 30% dos portugueses são homens, 75% dos espanhóis são mulheres, e 50% de pessoas provenientes de outras origens são mulheres. O artista pede aos homens presentes que se levantem e escolhe aleatoriamente um para participar no espectáculo. Qual a probabilidade de ser escolhido um português?

2. O número de pessoas atendidas por hora em determinado serviço público tem distribuição de Poisson com média igual a 10.

Determine a probabilidade de em 24 minutos chegarem menos de 8 pessoas.

0.0298 ☐ 0.9489 X 0.0595 ☐ 0.9786 ☐

3. Uma loja vende dois produtos A e B. Seja X a procura diária de A e Y a procura diária de B. A função probabilidade conjunta de X e Y é dada por:

Y / X	0	1	2	3	
0	0.1	0.05	0.1	0.05	
1	0.1	0.15	0.15	0.1	
2	0.02	0.03	0.1	0.05	

a) Construa as funções probabilidade marginais na tabela acima. O que pode concluir sobre a independência das variáveis aleatórias X e Y? Justifique.

b) Calcule o número médio de unidades do produto B procuradas num dia em que a procura do produto A foi de 2 unidades.

4. A vida útil (em milhares de kms) de um pneu de determinada marca tem distribuição normal de média 45 e desvio padrão 8.

a) Qual a probabilidade de um pneu dessa marca, escolhido ao acaso, durar menos de 35 mil kms?.

0.1057 X 0.9696 ☐ 0.2660 ☐ 0.8944 ☐

b) Num carro equipado com 4 pneus dessa marca qual a probabilidade de que pelo menos 2 durem mais de 45 mil kms.

0.625 ☐ 0.6875 X 0.312 ☐ 0.7 ☐

c) Numa amostra aleatória de 5 pneus qual a probabilidade de a duração mínima ser inferior à média da população.

5. Seja X a variável aleatória que representa, em **centenas** de euros, o lucro de uma operação comercial e cuja função densidade de probabilidade é :

$$f_X(x) = 1/8 \quad (-2 < x < 6)$$

a) Determine a probabilidade de a operação ter tido lucro.

b) Sabe-se que a operação teve um lucro inferior a 200 euros, qual a probabilidade de ter sido superior a 100 euros?

.