

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Formulário**

Axiomática: P1.  $P(A) \geq 0$  P2.  $P(\Omega) = 1$  P3. Se  $A \cap B = \emptyset$  então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$ ;  $\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$ ;  $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ ;  $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$ ;  $E(Y) = E_X[E(Y | X)]$ ;

Função geradora de momentos:  $M_X(s) = E(e^{sX})$ ;  $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$

$X \sim \text{Po}(\lambda) \Rightarrow f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$  ( $\lambda > 0, x = 0, 1, \dots$ );  $X \sim B(n, \theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$  ( $n > 1, x = 0, 1, \dots, n$ )

$X \sim \text{Ex}(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ;  $X \sim N(0, 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_1$ ;  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ;  $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2$ ;

$(n-1)S'^2 = nS^2$ ;  $X \sim \chi^2_{(n)}$  então  $E(X) = n$ ;  $\text{Var}(X) = 2n$ ;  $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale -2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10].

1. Considere uma partição  $\{A_1, A_2, A_3\}$  do espaço de resultados  $\Omega$  e sejam B e C acontecimentos de  $\Omega$  com probabilidade positiva. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Os acontecimentos $A_i$ ( $i = 1, 2, 3$ ) são independentes.		X
$U_{i=1}^3 A_i = \Omega$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ ( $i \neq j$ ).	X	
$P(B \cap C) = P(B \cap C   A_1) \times P(A_1) + P(B \cap C   A_2) \times P(A_2) + P(B \cap C   A_3) \times P(A_3)$ .	X	
Admita que B e C são acontecimentos incompatíveis. Então $P(B - C) = P(B)$ .	X	

2. Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição  $F(x)$ . Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Sejam $a < b < c$ números reais e $P(X > c) > 0$ . Tem-se $P(X > a   X > c) = P(X > b   X > c)$ .	X	
Sejam X uma variável aleatória contínua e $G(y)$ a função distribuição de $Y = X/2$ . Então $G(y) = 1 - F(2y)$		X
$\forall x \in \mathbb{R}, F(x+0) - F(x) = 0$ seja X contínua, discreta ou mista.	X	
Se X é uma variável mista e a um ponto de continuidade de $F(x)$ , então $P(X \leq a) > P(X < a)$		X

3. Seja  $f(x, y)$  a função densidade conjunta de uma variável aleatória bidimensional (X, Y). Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Suponha que a distribuição de uma variável aleatória contínua X é assimétrica positiva e seja $\mu_e$ a respectiva mediana. Então $P(X > \mu_e) < 0.5$ .		X
Se X é uma variável aleatória com $E(X) = \mu$ ; $\text{Var}(X) = \sigma^2$ e $Y = (3X - 2)/\sigma$ , então $\text{Var}(Y) = 9$ .	X	
Se $\text{cov}(X, Y) \neq 0$ então X e Y não são independentes,	X	
$P(Y \leq a) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy$	X	

4. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se $X \sim B(n, \theta) \Rightarrow Y = n - X \sim B(n - x, \theta)$ .		X
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y = -X \sim N(-\mu, \sigma^2)$ .	X	
X é uma variável contínua com $F(x)$ estritamente crescente. Seja $Y = F(X)$ . Qualquer que seja a distribuição de X, $Y \sim U(0, 1)$ .	X	
Considere um processo de Poisson com taxa média $\lambda$ por minuto. Então o tempo médio, em minutos, de espera por uma ocorrência nesse processo é $1/\lambda$ .	X	

5. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $n > 2$ , uma amostra casual simples retirada de uma população X com média e variância desconhecidas. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
O valor esperado da variância corrigida da amostra coincide com a variância da população.	X	
$(X_{(n)} - X_{(1)})/\sigma$ é uma estatística.	X	
$Cov(X_i, X_j) \neq 0$ ( $i \neq j$ )		X
$P(X_i \leq x) = F(x)$ ( $i = 1, 2, \dots, n$ )	X	

6. Mostre que numa distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$  inteiro  $P(X = \lambda) = P(X = \lambda - 1)$ .

[Cotação: 15]

$$P(X = \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^\lambda}{\lambda!} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\lambda-1} * \lambda}{\lambda * (\lambda-1)!} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} = P(X = \lambda - 1).$$

7. Sejam os acontecimentos  $A, B, C \subset \Omega$  com probabilidades não nulas e mutuamente independentes. Justifique a igualdade:  $P(A - B|C) = P(A)P(\bar{B})$ .

[cotação: 15]

$$P(A - B|C) = P[(A - A \cap B)|C] = P[A|C] - P[(A \cap B)|C] = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} - \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} =$$

$$\frac{\overbrace{P(A) * P(C)}^{\text{mutuamente independentes}}}{P(C)} - \frac{\overbrace{P(A) * P(B) * P(C)}^{\text{pq } A, B \text{ e } C \text{ são}}}{P(C)} = P(A) - P(A) * P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) * P(\bar{B})$$

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Formulário**

Axiomática: P1.  $P(A) \geq 0$  P2.  $P(\Omega) = 1$  P3. Se  $A \cap B = \emptyset$  então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$Var(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$ ;  $Cov(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$ ;  $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ ;  $Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab Cov(X, Y)$ ;  $E(Y) = E_X[E(Y | X)]$ ;

Função geradora de momentos:  $M_X(s) = E(e^{sX})$ ;  $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$

$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = (e^{-\lambda} \lambda^x) / x!$  ( $\lambda > 0, x = 0, 1, \dots$ );  $X \sim B(n, \theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$  ( $n > 1, x = 0, 1, \dots, n$ )

$X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ;  $X \sim N(0, 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_1$ ;  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ;  $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2$ ;

$(n-1)S'^2 = n S^2$ ;  $X \sim \chi^2_{(n)}$  então  $E(X) = n$ ;  $Var(X) = 2n$ ;  $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

**Atenção:** Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale -2,5. A classificação desta questão variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10]

1. Considere uma partição  $\{A_1, A_2, A_3\}$  do espaço de resultados  $\Omega$  e sejam B e C acontecimentos de  $\Omega$  com probabilidade positiva. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Os acontecimentos $A_i$ ( $i = 1, 2, 3$ ) são incompatíveis	X	
Os acontecimentos $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ são mutuamente independentes		X
Nestas condições tem-se sempre $P(B - C) \geq P(B)$		X
Se $B \subset A_2 \Rightarrow P(B) = P(B A_2)P(A_2)$	X	

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição  $F(x)$ . Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}, a < b < c$ e $P(X < b) > 0$ . Então $P(X < c   X < b) > P(X < a   X < b)$ .		X
Sejam X uma variável aleatória contínua e $G(y)$ a função distribuição de $Y = 1 - X$ . Então $G(y) = 1 - F(1-y)$ .	X	
$\forall x \in \mathbb{R}, F(x - 0) - F(x) = 0$ se X é uma variável aleatória contínua.		X
Se X é uma variável aleatória mista, então existe pelo menos um ponto de descontinuidade de $F(x)$ com probabilidade positiva	X	

3. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Suponha que a distribuição de uma variável aleatória contínua X é assimétrica negativa e seja $\mu_e$ a respectiva mediana. Então $P(X < \mu_e) < 0.5$ .		X
Seja $(X, Y)$ uma variável aleatória bidimensional. Se $Cov(X, Y) = 0$ , X e Y podem não ser independentes	X	
Se X é uma variável aleatória com $E(X) = \mu$ ; $Var(X) = \sigma^2$ e $Y = (X - \mu^2) / \sigma^2$ , então $Var(Y) = 1 / Var(X)$ .	X	
Se $M(s)$ é uma função geradora de momentos, então $M(0) = 1$	X	

4. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se $X \sim B(n, \theta) \Rightarrow Y = n - X \sim B(n - x; 1 - \theta)$ .		X
Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = F(X) \sim U(0,1)$	X	
Considere um processo de Poisson com taxa média $\lambda$ por unidade de tempo. Seja Y a variável aleatória que representa o tempo de espera pela primeira ocorrência. Então $E(Y) = 1/\lambda$ .	X	
Se $X_i (i = 1; \dots, n)$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal standardizada, então $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$	X	

5. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n), n > 2$ , uma amostra casual simples retirada de um universo X com média e variância desconhecidas. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
$P(X_1 < x, X_2 < x, \dots, X_n < x) = [F(x)]^n$	X	
$(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu) / (\sigma\sqrt{n})$ é uma estatística		X
Se existe $Var(X)$ então $Var(\bar{X}) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$	X	
O valor esperado da variância da amostra sobre avalia a variância da população		X

6. Mostre que numa distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$  inteiro  $P(X = \lambda) = P(X = \lambda - 1)$ .

[Cotação: 15]

7. Sejam os acontecimentos  $A, B, C \subset \Omega$  com probabilidades não nulas e mutuamente independentes. Justifique a igualdade:  $P(A - B|C) = P(A)P(\bar{B})$ .

[Cotação: 15]

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Formulário**

Axiomática: P1.  $P(A) \geq 0$  P2.  $P(\Omega) = 1$  P3. Se  $A \cap B = \emptyset$  então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$ ;  $\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$ ;  $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ ;  $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$ ;  $E(Y) = E_X[E(Y | X)]$ ;

Função geradora de momentos:  $M_X(s) = E(e^{sX})$ ;  $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$

$X \sim \text{Po}(\lambda) \Rightarrow f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$  ( $\lambda > 0, x = 0, 1, \dots$ );  $X \sim B(n, \theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$  ( $n > 1, x = 0, 1, \dots, n$ )

$X \sim \text{Ex}(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ;  $X \sim N(0, 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi_1^2$ ;  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ;  $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2$ ;

$(n-1)S^2 \sim n S^2$ ;  $X \sim \chi_{(n)}^2$  então  $E(X) = n$ ;  $\text{Var}(X) = 2n$ ;  $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$

**Atenção:** Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale -2,5. A classificação desta questão variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10]

1 Considere  $A_1, A_2, A_3$  acontecimentos do espaço de resultados  $\Omega$ , incompatíveis 2 a 2, com probabilidade positiva. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ , então $A_1, A_2, A_3$ formam uma partição de $\Omega$	X	
$A_1, A_2, A_3$ são acontecimentos mutuamente independentes		X
$P(A_1 - A_2) = P(A_1)$	X	
Se $A_1, A_2, A_3$ formam uma partição de $\Omega$ , então $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$	X	

2. Seja  $X$  uma variável aleatória com função de distribuição  $F(x)$ .

Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Sejam $a < b < c$ números reais e $P(X \leq c) > 0$ . Tem-se $P(X \leq a   X \leq c) < P(X \leq b   X \leq c)$ .	X	
Se $X$ é uma variável aleatória mista, não existem pontos de descontinuidade de $F(x)$ .		X
Sejam $X$ uma variável aleatória contínua e $G(y)$ a função distribuição de $Y = -X$ . Então $G(y) = 1 - F(-y)$	X	
Se $X$ for discreta $\forall x \in \mathbb{Z}, F(x - 0) - F(x) = 0$ .		X

3. Seja  $f(x, y)$  a função densidade conjunta de uma variável aleatória bidimensional  $(X, Y)$ . Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Suponha que a distribuição de uma variável aleatória contínua $X$ é assimétrica positiva e seja $\mu_e$ a respectiva mediana. Então $P(X > \mu_e) = 0.5$ .	X	
Se $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , então $X$ e $Y$ são independentes		X
Se $X$ é uma variável aleatória com $E(X) = \mu; \text{Var}(X) = \sigma^2$ e $Y = 2X/\sigma^2$ , então $\text{Var}(Y) = 4$		X
$F_X(a) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx$	X	

4. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se $X \sim U(a, a + 1) \forall a \in \mathbb{R}$ então a probabilidade de qualquer sub-intervalo nele contido é igual ao seu comprimento	X	
Se $X_i (i = 1, \dots, n)$ forem independentes com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ , então $\sum_{i=1}^n ((X_i - \mu)/\sigma)^2 \sim \chi^2_{(2n)}$		X
Considere um processo de Poisson com taxa média 5 por unidade de tempo. Seja Y a variável aleatória que representa o número de ocorrências em certo intervalo. Então $P(2 < Y < 3) = 0$	X	
Se as variáveis aleatórias $X_i \sim B(1, \theta) (i = 1, \dots, n)$ independentes $\Rightarrow n\bar{X} \sim B(n, \theta)$	X	

5. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra casual simples retirada de um universo X. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é uma estatística	X	
A variância da média da amostra é igual à variância da população		X
$Cov(X_i, X_j) = 0 (i \neq j)$	X	
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , então $\sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X})/\sigma]^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$	X	

6. Mostre que numa distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$  inteiro  $P(X = \lambda) = P(X = \lambda - 1)$ .

[Cotação: 15]

7. Sejam os acontecimentos  $A, B, C \subset \Omega$  com probabilidades não nulas e mutuamente independentes. Justifique a igualdade:  $P(A - B|C) = P(A)P(\bar{B})$ .

[Cotação: 15]

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Formulário**

Axiomática: P1.  $P(A) \geq 0$  P2.  $P(\Omega) = 1$  P3. Se  $A \cap B = \emptyset$  então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2; \text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y); \rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y); \text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y); E(Y) = E_X[E(Y | X)];$$

Função geradora de momentos:  $M_X(s) = E(e^{sX}); E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$

$$X \sim \text{Po}(\lambda) \Rightarrow f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} (\lambda > 0, x = 0, 1, \dots); X \sim B(n, \theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} (n > 1, x = 0, 1, \dots, n)$$

$$X \sim \text{Ex}(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}; X \sim N(0, 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi_1^2; \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}; S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2;$$

$$(n-1)S^2 = n S^2; X \sim \chi_{(n)}^2 \text{ então } E(X) = n; \text{Var}(X) = 2n; \text{Var}(X) = 2n; \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$$

**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale -2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10!

1 Considere uma partição  $\{A_1, A_2, A_3\}$  do espaço de resultados  $\Omega$  e sejam B e C acontecimentos de  $\Omega$  com probabilidade positiva. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
$P(B - C) \leq P(B)$ .	X	
Nestas condições tem-se sempre $P[A_1   A_2 \cup A_3] = 0$	X	
Os acontecimentos $A_1, A_2, A_3$ são mutuamente independentes.		X
Os acontecimentos $A_i (i = 1, 2, 3)$ são acontecimentos incompatíveis.	X	

2. Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com função de distribuição  $F(x)$  e  $D_X$  o respectivo conjunto de pontos de descontinuidade. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se $a, b \in D_X, a < b, \Rightarrow P(a \leq X < b) = F(b - 0) - F(a)$ .		X
Se $\varphi$ é uma função real de variável real, $Y = \varphi(X)$ pode não ser uma variável aleatória discreta.		X
$\forall a \in D_X F(a + 0) = F(a)$ .	X	
$E(X)$ pode assumir valores que não pertencem a $D_X$	X	

3. Seja  $(X, Y)$  uma variável aleatória bidimensional com função probabilidade conjunta  $f(x, y)$ . Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se $X$ é uma variável aleatória com $E(X) = \mu; \text{Var}(X) = \sigma^2$ e $Y = (X - \mu)^2 / \sigma^2$ , então $E(Y) = 1$ .	X	
A $\text{Cov}(X, Y)$ pode ser nula mesmo que $X$ e $Y$ não sejam independentes	X	
Se $D_X = \{1, \dots, 5\}, D_Y = \{0, 1, 2\}$ a $P(Y < 2) = \sum_{y=0}^2 \sum_{x=1}^5 f(x, y)$		X
Suponha que a distribuição de uma variável aleatória contínua $X$ é simétrica e seja $\mu_e$ a respectiva mediana. Então $P(X > \mu_e) < 0.5$ .		X

4. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
Se $X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow Y = F(X) \sim U(0,1)$ .	X	
Seja $X_i \sim N(0,1)$ ( $i = 1, \dots, n$ ) independentes, então $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$ .	X	
Considere um processo de Poisson com taxa média $\lambda$ por unidade de tempo. Seja Y a variável aleatória que representa o tempo de espera pela n-ésima ocorrência. Então $E(Y) = n/\lambda$ .	X	
Se $X_i \sim B(1, \theta)$ ( $i = 1, \dots, n$ ) independentes então $\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, n\theta)$ .		X

5. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n), n > 2$ , uma amostra casual simples retirada de um universo X com média e variância desconhecidas. Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva:

	V	F
O valor esperado da variância da amostra sub-avalia a variância da população.	X	
$nS^2/\sigma^2$ é uma estatística.		X
Se $X \sim t_{(m)}$ então X tende assintoticamente para $N(0,1)$ quando $m \rightarrow \infty$	X	
$P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) = [1 - F(x)]^n$ .	X	

6. Mostre que numa distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$  inteiro  $P(X = \lambda) = P(X = \lambda - 1)$ .

[Cotação: 15]

7. Sejam os acontecimentos  $A, B, C \subset \Omega$  com probabilidades não nulas e mutuamente independentes. Justifique a igualdade:  $P(A - B|C) = P(A)P(\bar{B})$ .

[Cotação: 15]





Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

Espaço reservado para classificações				
1ª.(20)	2ª.(20)	3ª.(10)	4ª.(10)	T:
1b.(10)	2b.(10)	3b.(20)	4b.(20)	P:

1. Os contribuintes de IRS, estão para efeitos estatísticos, divididos em 3 categorias: pequenos, médios e grandes, respectivamente nas seguintes proporções: 0.5, 0.4, 0.1. Com base na experiência de anos anteriores, sabe-se que as probabilidades de declarações com erros e omissões são de 1%, 10% e 20% respectivamente para contribuintes pequenos, médios e grandes.

a) Uma das declarações continha erros. Qual a probabilidade de que seja de um contribuinte classificado como médio?

$$P(A_2|B) = 0.6154$$

b) O computador da DGCI vai seleccionar aleatoriamente dez contribuintes médios para análise das declarações. Calcule a probabilidade de duas declarações de contribuintes conterem erros e as restantes não?

0,1937       0,9298       0,1209       0,1673

2. Sejam as variáveis X e Y com função densidade conjunta:

$$f(x, y) = 9x^2y^2 \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

a) Verifique que  $f_X(x) = 3x^2$ ,  $0 < x < 1$  e estude a independência das variáveis aleatórias X e Y.

$$f_Y(y) = 3y^2. \text{ Logo as variáveis aleatórias X e Y são independentes}$$

b) Considere a variável aleatória  $W = 2X - 2$ . Calcule a  $P(W < -1)$ .

$\frac{1}{8}$         $\frac{1}{16}$        1        $\frac{27}{64}$

3. A resistência à fractura de um novo tipo de material de soldadura é uma variável aleatória com distribuição normal de média 10 e variância 4.

a) Determine um limite máximo de resistência à fractura que se verifique em 80% dos casos.

12.56       11.68       11.05       10.51

b) Tendo sido seleccionada uma amostra casual de dimensão 9 desse material, qual a probabilidade de que a média da resistência dos elementos da amostra difira da média da população por valores inferiores a 0,1?

$$P(|\bar{X} - \mu| < 0.1) = 0.1192$$

4. Um professor corrige exames ininterruptamente. A correcção de exames segue um processo de Poisson com taxa média de 5 por hora.

a) Qual a probabilidade de decorrerem mais de 15 minutos entre a correcção de 2 exames consecutivos?

0.2865

0.6446

0.7135

0.8685

b) Seleccionada uma amostra casual de tempos de correcção de 5 provas, qual a probabilidade de a prova corrigida em menos tempo ter sido corrigida em menos de 12 minutos.

$$P(X_{(1)} < 12) = 0.9933$$



Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Espaço reservado para classificações**

1a.(20)	2a.(20)	3a.(10)	4a.(10)	T:
1b.(10)	2b.(10)	3b.(20)	4b.(20)	P:

1. Os contribuintes de IRS, estão para efeitos estatísticos, divididos em 3 categorias: pequenos, médios e grandes, respectivamente nas seguintes proporções: 0.5, 0.4, 0.1. Com base na experiência de anos anteriores, sabe-se que as probabilidades de declarações com erros e omissões são de 1%, 10% e 20% respectivamente para contribuintes pequenos, médios e grandes.

a) Uma das declarações continha erros. Qual a probabilidade de que seja de um contribuinte classificado como médio?

b) O computador da DGCI vai seleccionar aleatoriamente dez contribuintes grandes para análise das declarações. Calcule a probabilidade de quatro declarações de contribuintes conterem erros e as restantes não?

0,9672

0,0881

0,2051

0,3770

2. Sejam as variáveis X e Y com função densidade conjunta:

$$f(x,y) = 9x^2y^2 \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

a) Verifique que  $f_X(x) = 3x^2$ ,  $0 < x < 1$  e estude a independência das variáveis aleatórias X e Y.

b) Considere a variável aleatória  $W = X + 3$ . Calcule a  $P(W < 3.25)$ .

0.1250

0.4219

0.0156

0.0640

3. A resistência à fractura de um novo tipo de material de soldadura é uma variável aleatória com distribuição normal de média 10 e variância 4.

a) Determine um limite máximo de resistência à fractura que se verifique em 70% dos casos.

12.56

11.68

11.05

10.51

b) Tendo sido seleccionada uma amostra casual de dimensão 9 desse material, qual a probabilidade de que a média da resistência dos elementos da amostra difira da média da população por valores inferiores a 0,1?

4. Um professor corrige exames ininterruptamente. A correcção de exames segue um processo de Poisson com taxa média de 5 por hora.

a) Qual a probabilidade de decorrerem mais de 24 minutos entre a correcção de 2 exames consecutivos?

0.6767

0.4601

0.1353

0.8647

b) Seleccionada uma amostra de tempos de correcção de 5 provas, qual a probabilidade de a prova corrigida em menos tempo ter sido corrigida em menos de 12 minutos.



## 2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Espaço reservado para classificações**

1a.(20)	2a.(20)	3a.(10)	4a.(10)	T:
1b.(10)	2b.(10)	3b.(20)	4b.(20)	P:

1. Os contribuintes de IRS, estão para efeitos estatísticos, divididos em 3 categorias: pequenos, médios e grandes, respectivamente nas seguintes proporções: 0.5, 0.4, 0.1. Com base na experiência de anos anteriores, sabe-se que as probabilidades de declarações com erros e omissões são de 1%, 10% e 20% respectivamente para contribuintes pequenos, médios e grandes.

a) Uma das declarações continha erros. Qual a probabilidade de que seja de um contribuinte classificado como médio?

b) O computador da DGCI vai seleccionar aleatoriamente oito contribuintes médios para análise das declarações. Calcule a probabilidade de três declarações de contribuintes conterem erros e as restantes não?

0,5941 0,2787 0,0331 0,9949

2. Sejam as variáveis X e Y com função densidade conjunta:

$$f(x,y) = 9x^2y^2 \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

a) Verifique que  $f_X(x) = 3x^2$ ,  $0 < x < 1$  e estude a independência das variáveis aleatórias X e Y.

b) Considere a variável aleatória  $W = 2X + 2$ . Calcule a  $P(W < 3.5)$ .

0.1250

0.4219

0.0156

0.0640

3. A resistência à fractura de um novo tipo de material de soldadura é uma variável aleatória com distribuição normal de média 10 e variância 4.

a) Determine um limite máximo de resistência à fractura que se verifique em 90% dos casos.

12.56

11.68

11.05

10.51

b) Tendo sido seleccionada uma amostra casual de dimensão 9 desse material, qual a probabilidade de que a média da resistência dos elementos da amostra difira da média da população por valores inferiores a 0,1?

4. Um professor corrige exames ininterruptamente. A correcção de exames segue um processo de Poisson com taxa média de 5 por hora.

a) Qual a probabilidade de decorrerem mais de 30 minutos entre a correcção de 2 exames consecutivos?

0.9856

0.0821

0.9098

0.3935

b) Seleccionada uma amostra de tempos de correcção de 5 provas, qual a probabilidade de a prova corrigida em menos tempo ter sido corrigida em menos de 12 minutos.





Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Espaço reservado para classificações**

1ª.(20)	2ª.(20)	3ª.(10)	4ª.(10)	T:
1b.(10)	2b.(10)	3b.(20)	4b.(20)	P:

1. Os contribuintes de IRS, estão para efeitos estatísticos, divididos em 3 categorias: pequenos, médios e grandes, respectivamente nas seguintes proporções: 0.5, 0.4, 0.1. Com base na experiência de anos anteriores, sabe-se que as probabilidades de declarações com erros e omissões são de 1%, 10% e 20% respectivamente para contribuintes pequenos, médios e grandes.

a) Uma das declarações continha erros. Qual a probabilidade de que seja de um contribuinte classificado como médio?

b) O computador da DGCI vai seleccionar aleatoriamente seis contribuintes grandes para análise das declarações. Calcule a probabilidade de três declarações de contribuintes conterem erros e as restantes não?

0,3125

0,6563

0,9830

0,0819

2. Sejam as variáveis X e Y com função densidade conjunta:

$$f(x, y) = 9x^2y^2 \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

a) Verifique que  $f_X(x) = 3x^2$ ,  $0 < x < 1$  e estude a independência das variáveis aleatórias X e Y.

b) Considere a variável aleatória  $W = X - 3$ . Calcule a  $P(W < -2.6)$ .

0.1250

0.4219

0.0156

0.0640

3. A resistência à fractura de um novo tipo de material de soldadura é uma variável aleatória com distribuição normal de média 10 e variância 4.

a) Determine um limite máximo de resistência à fractura que se verifique em 60% dos casos.

12.56

11.68

11.05

10.51

b) Tendo sido seleccionada uma amostra casual de dimensão 9 desse material, qual a probabilidade de que a média da resistência dos elementos da amostra difira da média da população por valores inferiores a 0,1?

4. Um professor corrige exames ininterruptamente. A correcção de exames segue um processo de Poisson com taxa média de 5 por hora.

a) Qual a probabilidade de decorrerem mais de 9 minutos entre a correcção de 2 exames consecutivos?

0.8266

0.5276

0.9595

0.4724

b) Seleccionada uma amostra de tempos de correcção de 5 provas, qual a probabilidade de a prova corrigida em menos tempo ter sido corrigida em menos de 12 minutos.