ISEG **ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 1º semestre, ER** **28. 01. 13**

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A \cap B = \varnothing$ então $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$

$\text{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2)-\mu^2$; $\text{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY) = a^2\text{Var}(X)+b^2\text{Var}(Y)+2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X\left[E(Y \mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$

$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = \left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda > 0, x = 0,1,\cdots)$; $X \sim B(n,\theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n > 1, x = 0,1,\cdots,n)$

$X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x < 0)$; $X \sim G(\alpha,\lambda) \Rightarrow cX \sim G(\alpha, \lambda/c)$ $c = cte$; $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $(n-1)S'^2 = n\,S^2$

$S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \overline{X}^2$; $X \sim \chi^2_{(n)}$ então $E(X) = n$; $\text{Var}(X) = 2n$; $M_X(s) = (1-2s)^{-n/2}$, $s < \dfrac{1}{2}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O espaço de resultados associado à experiência de análise de pedidos de crédito para compra de habitação e observação do valor de avaliação do imóvel é discreto.		X
Se $P(A) = 5/6$ e $P(B) = 2/3$ então A e B são incompatíveis.		X
Seja $\{A_1, A_2, A_3\}$ uma partição de Ω e o acontecimento $B \subset \Omega$. Se $B \subset (A_2 \cup A_3)$, então $P(B) = P(B\|A_2)P(A_2) + P(B\|A_3)P(A_3)$	X	
Se $\overline{A \cap B} = \Omega$, então $P(A \cap B) = 0$	X	

2. Seja X uma variável aleatória com função probabilidade ou densidade de probabilidade $f_X(x)$ e D_X o conjunto de pontos de descontinuidade de $F_X(x)$. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
A função $F_X(x)$ é sempre não decrescente.	X	
$\forall x \in \mathcal{R}, \lim_{h \to 0} F_X(x+h) - F_X(x) = 0$ seja X uma variável aleatória contínua, discreta ou mista		X
Se $D_X \neq \emptyset$ então X não é uma v.a. contínua	X	
Se X é uma v.a. contínua, $f_X(x)$ pode assumir valores superiores a 1	X	

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O percentil ξ_α da distribuição da v.a. X é o valor ξ_α tal que $F_X(\xi_\alpha) = 1 - \alpha$		X
Se X e Y forem independentes, $E(XY)$ existe sempre desde que existam $E(X)$ e $E(Y)$	X	
Se X e Y forem independentes pode-se garantir que $Cov(X,Y) = 0$.	X	
Se $M_X(s)$ e $M_Y(s)$ são funções geradoras dos momentos das v.a.(s) independentes Xe Y, então $E(X+Y) = M'_X(0) + M'_Y(0)$	X	

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim U(a, a+1), a > 0$ então a probabilidade de qualquer sub-intervalo (a, x) é igual à respectiva amplitude	X	
Seja $X \sim N(0, \sigma^2)$, então $Y = -X \sim N(0, \sigma^2)$	X	
Seja $X_1 \sim B(2, \theta_1)$ e $X_2 \sim B(2, \theta_2)$, então $X_1 + X_2 \sim B(4, \theta_1 + \theta_2)$		X
Se $X \sim G(\alpha, \lambda)$, então $X/3 \sim G(\alpha, \lambda/3)$.		X

5. Considere duas amostras casuais simples e independentes de dimensão $n > 2$ retiradas de uma População X com parâmetros desconhecidos e variância positiva. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ as respectivas médias amostrais. Então $E(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) = 2E(X)$	X	
Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ as respectivas médias amostrais. Então $Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = 0$		X
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)/2$ é uma estatística.	X	
Se $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$ então a segunda amostra tem uma dimensão inferior à primeira		X

6. Utilizando os axiomas da teoria das probabilidades, mostre que para qualquer acontecimento A, se tem $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Justifique cuidadosamente todos os passos. [Cotação: 15]

$A \cup \bar{A} = \Omega$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) - P(A \cap \bar{A}) = P(\Omega)$ pelo axioma P2

$\Leftrightarrow P(A) + P(\bar{A}) - P(\emptyset) = 1$ pelo axioma P3

$\Leftrightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

7. Seja X uma variável aleatória com distribuição $U(0,1)$. Prove que $Y = 1 - X$ também segue uma distribuição $U(0,1)$. Justifique cuidadosamente todos os passos. [Cotação: 15]

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(1 - X \leq y) = P(X > 1 - y) = 1 - P(X \leq 1 - y) = 1 - F_X(1 - y)$$

$$= 1 - \frac{1-y}{1} = y \quad (0 < y < 1) \text{ então } Y \sim U(0,1)$$

ISEG **ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 1º semestre, ER** **28. 01. 13**

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$ P2. $P(\Omega) = 1$ P3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\text{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$; $\text{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X\left[E(Y \mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X{}^{(r)}(0)$;

$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = \left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda > 0, x = 0,1,\cdots); X \sim B(n,\theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n > 1, x = 0,1,\cdots,n)$

$X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\ (x < 0); X \sim G(\alpha,\lambda) \Rightarrow cX \sim G(\alpha, \lambda/c)\ \ c = cte; \overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $(n-1)S'^2 = n\,S^2$

$S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \overline{X}^2$; $X \sim \chi^2_{(n)}$ então $E(X) = n$; $\text{Var}(X) = 2n$; $M_X(s) = (1-2s)^{-n/2}, s < \dfrac{1}{2}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O espaço de resultados associado à experiência de análise de pedidos de crédito para compra de habitação e observação do rendimento do agregado familiar é contínuo.	X	
Se $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 3/4$ então A e B são incompatíveis.		X
Seja $\{A_1, A_2, A_3\}$ uma partição de Ω e o acontecimento $B \subset \Omega$. Se $B \cap A_1 = \emptyset$, então $P(B) = P(B\|A_2)P(A_2) + P(B\|A_3)P(A_3)$	X	
Se $\overline{A \cap B} = \Omega$, então $P(A \cap B) \neq 0$		X

2. Seja X uma variável aleatória com função probabilidade ou densidade de probabilidade $f_X(x)$ e D_X o conjunto de pontos de descontinuidade de $F_X(x)$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
A função $F_X(x)$ é sempre estritamente crescente.		X
$\forall x \in \mathcal{R}, \lim_{h \to 0} F_X(x+h) - F_X(x) = 0$ só se X não for uma variável aleatória mista nem discreta.	X	
Se $D_X \neq \emptyset$ e $\sum_{x \in D_X} P(X = x) = 1$ então X é uma v.a. discreta..	X	
Se X for uma variável aleatória contínua, $f_X(x)$ nunca pode assumir valores superiores a 1		X

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O percentil ξ_α da distribuição da v.a. X é o valor ξ_α tal que $P(X > \xi_\alpha) = 1 - \alpha$	X	
Se $Cov(X,Y) = 3$, pode garantir-se que as v.a.(s) X e Y não são independentes	X	
Se $M_X(s)$ e $M_Y(s)$ são funções geradoras dos momentos das v.a.(s) independentes Xe Y, então $E(X+Y) = M'_X(0).M'_Y(0)$		X
Se X e Y forem independentes, existindo $E(X)$ e $E(Y)$ pode não existir $E(XY)$		X

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X\sim U(a, a+2), a>0$ então a probabilidade de qualquer sub-intervalo (a, x) é igual a metade da respectiva amplitude	X	
Seja $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, então $Y=-X\sim N(0,\sigma^2)$		X
Seja $X_1\sim B(2,\theta_1)$ e $X_2\sim B(2,\theta_2)$, então $X_1+X_2\sim B(4,\ \theta)$ se e só se $\theta_1=\theta_2=\theta$	X	
Se $X\sim G(\ \alpha,\lambda),$ então $2X\sim G(\ \alpha, 2\lambda)$.		X

5. Considere duas amostras casuais simples e independentes de dimensão $n>2$ retiradas de uma População X com parâmetros desconhecidos e variância positiva. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ as respectivas médias amostrais. Então $E(\bar{X}_1+\bar{X}_2)\neq 2E(X)$		X
Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ as respectivas médias amostrais. Então $Var\ (\bar{X}_1-\bar{X}_2)>0$	X	
Se $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$ então $(\bar{X}_1+\bar{X}_2)/2\,\sigma$ é uma estatística.		X
Se $\bar{x}_1>\bar{x}_2$ então a primeira amostra tem uma dimensão inferior à segunda		X

6. Utilizando os axiomas da teoria das probabilidades, mostre que para qualquer acontecimento A, se tem $P(\bar{A})=1-P(A)$. Justifique cuidadosamente todos os passos. [Cotação: 15]

7. Seja X uma variável aleatória com distribuição $U(0,1)$. Prove que $Y=1-X$ também segue uma distribuição $U(0,1)$. Justifique cuidadosamente todos os passos. [Cotação: 15]

ISEG **ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 1º semestre, ER** **28. 01. 13**

1ª Parte - Teórica – 40 minutos V3

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\text{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\text{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY)=a^2\text{Var}(X)+b^2\text{Var}(Y)+2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1,x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\ (x<0)$; $X\sim G(\alpha,\lambda)\Rightarrow cX\sim G(\alpha,\lambda/c)\ c=cte$; $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\overline{X}^2$; $X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\text{Var}(X)=2n$; $M_X(s)=(1-2s)^{-n/2}$, $s<\dfrac{1}{2}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

1 Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O espaço de resultados associado à experiência de análise de pedidos de crédito para compra de habitação e observação do número de assoalhadas do imóvel é discreto.	X	
Se $P(A)=1/3$ e $P(B)=5/6$ então A e B não são incompatíveis.	X	
Seja $\{A_1,A_2,A_3\}$ uma partição de Ω e o acontecimento $B\subset\Omega$. Se $B\cap A_1\neq\emptyset$, $B\cap A_2\neq\emptyset$ e $B\cap A_3=\emptyset$, então $P(B)=P(B\|A_1)P(A_1)+P(B\|A_2)P(A_2)$	X	
Se $\overline{A\cap B}=\Omega$, então $P(A\cap B)=0$	X	

2. Seja X uma variável aleatória com função probabilidade ou densidade de probabilidade $f_X(x)$ e D_X o conjunto de pontos de descontinuidade de $F_X(x)$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
A função $F_X(x)$ só é não decrescente se X for uma variável aleatória discreta.		X
$\forall x\in\mathcal{R},\lim_{h\to 0}F_X(x+h)-F_X(x)=0$ só se X for uma variável aleatória discreta.		X
Se $D_X\neq\emptyset$ e $\sum_{x\in D_X}P(X=x)<1$ então X é uma v.a. mista..	X	
Se X é uma variável aleatória discreta, $f_X(x)$ pode assumir valores superiores a 1 nos pontos de descontinuidade de $F(x)$		X

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O percentil ξ_α da distribuição da v.a. X é o valor ξ_α tal que $F_X(\xi_\alpha)<\alpha$	X	
Se $Cov(X,Y)=0$, não se pode garantir que as variáveis aleatórias X e Y são independentes	X	
Se X e Y forem independentes, a existência de $E(X)$ e $E(Y)$ não garante a existência de $E(XY)$		X
Se $M_X(s)$ e $M_Y(s)$ são funções geradoras dos momentos das v.a.(s) independentes Xe Y, então $E(X+Y)=M_X'(0)+M_Y'(0)$	X	

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim U(1,3), a > 0$ então a probabilidade de qualquer sub-intervalo $(1,x)$ é igual a metade da respectiva amplitude	X	
Seja $X \sim N(0,\sigma^2)$ então $Y = 1 - X \sim N(1,\sigma^2)$	X	
Seja $X_1 \sim B(2,\theta_1)$ e $X_2 \sim B(2,\theta_2)$, então $X_1 + X_2 \sim B(4,\ \theta_1 + \theta_2)$		X
Se $X \sim G(\ \alpha, \lambda)$, então $X/3 \sim G(\ \alpha, 3\lambda)$.	X	

5. Considere duas amostras casuais simples e independentes de dimensão $n > 2$ retiradas de uma População X com parâmetros desconhecidos e variância positiva. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ as respectivas médias amostrais. Então $E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \neq 0$		X
Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ as respectivas médias amostrais. Então $Var\ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = 0$	X	
Se $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ então $(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)/2\sigma^2$ é uma estatística.		X
Se $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ então a segunda amostra tem uma dimensão inferior à primeira		X

6. Utilizando os axiomas da teoria das probabilidades, mostre que para qualquer acontecimento A, se tem $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Justifique cuidadosamente todos os passos. [Cotação: 15]

7. Seja X uma variável aleatória com distribuição $U(0{,}1)$. Prove que $Y = 1 - X$ também segue uma distribuição $U(0{,}1)$. Justifique cuidadosamente todos os passos. [Cotação: 15]

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\emptyset$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\text{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\text{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY)=a^2\text{Var}(X)+b^2\text{Var}(Y)+2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1,x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\;\;(x<0)$; $X\sim G(\alpha,\lambda)\Rightarrow cX\sim G(\alpha,\lambda/c)\;\;c=cte$; $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\overline{X}^2$; $X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\text{Var}(X)=2n$; $M_X(s)=(1-2s)^{-n/2},\,s<\dfrac{1}{2}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*

1. Sejam A e B acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω .
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O espaço de resultados associado à experiência de análise de pedidos de crédito para compra de habitação e observação do número de assoalhadas do imóvel é contínuo.		X
Se $P(A)=2/3$ e $P(B)=1/2$ então A e B não são incompatíveis.	X	
Seja $\{A_1,A_2,A_3\}$ uma partição de Ω e o acontecimento $B\subset\Omega$. Se $B\cap A_1=\emptyset$, então $P(B)=P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3)$	X	
Se $\overline{A\cap B}=\Omega$, então $P(A\cap B)\neq 0$		X

2. Seja X uma variável aleatória com função probabilidade ou densidade de probabilidade $f_X(x)$ e D_X o conjunto de pontos de descontinuidade de $F_X(x)$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se X é uma variável aleatória contínua, então a função $F_X(x)$ é sempre crescente.		X
$\forall x\in\mathcal{R},\lim_{h\to 0}F_X(x+h)-F_X(x)=0$ se e só se X for uma variável aleatória contínua	X	
Se X é uma v.a. discreta então D_X é um intervalo de $\Re$.		X
$f_X(x)$ nunca pode assumir valores inferiores a 0	X	

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O percentil ξ_α da distribuição da v.a. X é o valor ξ_α tal que $P_X(X>\xi_\alpha)>1-\alpha$	X	
Se $Cov(X,Y)=0$, nada se pode concluir sobre a independência das variáveis aleatórias X e Y	X	
Se $M_X(s)$ e $M_Y(s)$ são funções geradoras dos momentos das v.a.(s) independentes Xe Y, então $E(X+Y)=M_X'(0).M_Y'(0)$		X
Se X e Y forem independentes, a existência de $E(X)$ e $E(Y)$ garante a existência de $E(XY)$	X	

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim U(0,2)$, então a probabilidade de qualquer sub-intervalo $(0, x)$ é igual à respectiva amplitude		X
Seja $X \sim N(0, \sigma^2)$ então $Y = X - 1 \sim N(1, \sigma^2)$		X
Seja $X_1 \sim B(2, \theta_1)$ e $X_2 \sim B(2, \theta_2)$, então $X_1 + X_2 \sim B(4, \theta)$ se e só se $\theta_1 = \theta_2 = \theta$	X	
Se $X \sim G(\alpha, \lambda)$, então $2X \sim G(\alpha, \lambda/2)$.		X

5. Considere duas amostras casuais simples e independentes de dimensão $n > 2$ retiradas de uma População X com parâmetros desconhecidos e variância positiva. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ as respectivas médias amostrais. Então $E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = 0$	X	
Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ as respectivas médias amostrais. Então $Var\,(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) > 0$	X	
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)/2\sigma^2$ é uma estatística.		X
Se $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ então a primeira amostra tem uma dimensão inferior à segunda		X

6. Utilizando os axiomas da teoria das probabilidades, mostre que para qualquer acontecimento A, se tem $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Justifique cuidadosamente todos os passos. [Cotação: 15]

7. Seja X uma variável aleatória com distribuição $U(0,1)$. Prove que $Y = 1 - X$ também segue uma distribuição $U(0,1)$. Justifique cuidadosamente todos os passos. [Cotação: 15]

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – 1º sem 2012-2013 **28. 01. 13**

Exame Época Recurso

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(20)	2a.(20)	3a.(10)	3c.(15)	4.(15)	T:
1b.(10)	2b.(20)	3b.(10)			P:

1. A percentagem de estudantes do ISEG apreciadores da banda *Radiohead é de* 40%. Entre os estudantes apreciadores dos *Radiohead*, 80% também são apreciadores da banda *Arcade Fire*. Por outro lado, entre os estudantes que não apreciam os Radiohead, apenas 10% gostam dos *Arcade Fire*.

a) Qual a probabilidade de um estudante do ISEG escolhido ao acaso ser apreciador da banda *Arcade Fire*?

$$P(AF) = 0.38$$

b) Escolhidos ao acaso 10 estudantes do ISEG, qual a probabilidade de pelo menos 5 serem apreciadores da banda Radiohead?

0.7492 ☐ **0.3669** ☐ 0.1662 ☐ 0.7993 ☐

2. Sejam *X* e *Y* a rendibilidade e volatilidade (em dezenas de pontos percentuais) de uma acção, respectivamente. Assuma que para o conjunto de accções listadas na NYSE, a função densidade de probabilidade conjunta de *X* e *Y* é dada por:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{x+y}{15}, \qquad (0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 5).$$

a) Calcule a rendibilidade média das acções listadas na NYSE.

$$\boldsymbol{E(X)} = \frac{19}{36}$$

b) Calcule a volatilidade média das acções com rendibilidade nula.

$$\boldsymbol{E(Y|X=0)} = \frac{10}{3}$$

3. Numa determinada corretora, a ocorrência de ordens de compra de acções da empresa Google segue um processo de Poisson com média de 3 por hora.

a) Calcule a probabilidade de entre as 8h00 e as 12h00 serem solicitadas mais de 15 ordens de compra de acções da Google.

0.9095 ☐ 0.9276 ☐ 0.2280 ☐ **0.1556** ☐

b) Calcule a probabilidade do tempo entre duas ocorrências de ordens de compra de acções da Google ser superior a 30 minutos.

0.2231 ☐ 0.6202 ☐ 0.7769 ☐ 0.9664 ☐

c) Tendo sido registados 5 períodos de tempo entre duas ocorrências consecutivas de ordens de compra de acções da Google, calcule a probabilidade do maior período de tempo ser inferior a 1 hora.

X – tempo, em horas, entre ocorrências consecutivas de um processo de Poisson$\sim Ex(3)$
Amostra casual $n = 5$

$$P(Max\{X_i\} < 1) = 0.7746$$

4. O número de "amigos", na rede social Facebook, dos utilizadores do sexo feminino tem distribuição normal com média 250 e variância 2025. O número de "amigos" dos utilizadores do sexo masculino também tem distribuição normal, mas com média 230 e variância 1600. Seleccionada uma amostra casual de 20 utilizadores do sexo feminino e 20 utilizadores do sexo masculino, calcule a probabilidade da diferença entre as médias do número de "amigos" de utilizadores do sexo feminino e masculino nas duas amostras ser superior a 30.

$$\boldsymbol{P(\bar{X}_F - \bar{X}_M > 30) = 0.2288}$$

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – 1º sem 2012-2013 **28. 01. 13**

Exame Época Recurso

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações					
1a.(20)	2a.(20)	3a.(10)	3c.(15)	4.(15)	T:
1b.(10)	2b.(20)	3b.(10)			P:

1. A percentagem de estudantes do ISEG apreciadores da banda *Radiohead é de* 40%. Entre os estudantes apreciadores dos *Radiohead*, 80% também são apreciadores da banda *Arcade Fire*. Por outro lado, entre os estudantes que não apreciam os Radiohead, apenas 10% gostam dos *Arcade Fire*.

a) Qual a probabilidade de um estudante do ISEG escolhido ao acaso ser apreciador da banda *Arcade Fire*?

b) Escolhidos ao acaso 15 estudantes do ISEG, qual a probabilidade de pelo menos 5 serem apreciadores da banda Radiohead?

0.7827 ☐ 0.5968 ☐ 0.8732 ☐ 0.8141 ☐

2. Sejam *X* e *Y* a rendibilidade e volatilidade (em dezenas de pontos percentuais) de uma acção, respectivamente. Assuma que para o conjunto de accções listadas na NYSE, a função densidade de probabilidade conjunta de *X* e *Y* é dada por:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{x + y}{15}, \qquad (0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 5).$$

a) Calcule a rendibilidade média das acções listadas na NYSE.

b) Calcule a volatilidade média das acções com rendibilidade nula.

3. Numa determinada corretora, a ocorrência de ordens de compra de acções da empresa Google segue um processo de Poisson com média de 3 por hora.

a) Calcule a probabilidade de entre as 8h00 e as 10h00 serem solicitadas mais de 10 ordens de compra de acções da Google.

0.0426 ☐ 0.9587 ☐ 0.0839 ☐ 0.9312 ☐

b) Calcule a probabilidade do tempo entre duas ocorrências de ordens de compra de acções da Google ser superior a 20 minutos.

0.3679 ☐ 0.6321 ☐ 0.1054 ☐ 0.4724 ☐

c) Tendo sido registados 5 períodos de tempo entre duas ocorrências de ordens de compra de acções da Google, calcule a probabilidade do maior período de tempo ser inferior a 1 hora.

4. O número de “amigos”, na rede social Facebook, dos utilizadores do sexo feminino tem distribuição normal com média 250 e variância 2025. O número de “amigos” dos utilizadores do sexo masculino também tem distribuição normal, mas com média 230 e variância 1600. Seleccionada uma amostra casual de 20 utilizadores do sexo feminino e 20 utilizadores do sexo masculino, calcule a probabilidade da diferença entre as médias do número de “amigos” das duas amostras ser superior a 30.

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – 1º sem 2012-2013 **28. 01. 13**

Exame Época Recurso

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(20)	2a.(20)	3a.(10)	3c.(15)	4.(15)	T:
1b.(10)	2b.(20)	3b.(10)			P:

1. A percentagem de estudantes do ISEG apreciadores da banda *Radiohead é de* 40%. Entre os estudantes apreciadores dos *Radiohead*, 80% também são apreciadores da banda *Arcade Fire*. Por outro lado, entre os estudantes que não apreciam os Radiohead, apenas 10% gostam dos *Arcade Fire*.

a) Qual a probabilidade de um estudante do ISEG escolhido ao acaso ser apreciador da banda *Arcade Fire*?

b) Escolhidos ao acaso 10 estudantes do ISEG, qual a probabilidade de pelo menos 7 serem apreciadores da banda Radiohead?

0.8885 ☐ **0.0548** ☐ 0.9575 ☐ 0.0123 ☐

2. Sejam *X* e *Y* a rendibilidade e volatilidade (em dezenas de pontos percentuais) de uma acção, respectivamente. Assuma que para o conjunto de accções listadas na NYSE, a função densidade de probabilidade conjunta de *X* e *Y* é dada por:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{x+y}{15}, \qquad (0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 5).$$

a) Calcule a rendibilidade média das acções listadas na NYSE.

b) Calcule a volatilidade média das acções com rendibilidade nula.

3. Numa determinada corretora, a ocorrência de ordens de compra de acções da empresa Google segue um processo de Poisson com média de 3 por hora.

a) Calcule a probabilidade de entre as 8h00 e as 11h00 serem solicitadas mais de 15 ordens de compra de acções da Google.

0.0415 ☐ 0.9806 ☐ **0.0220** ☐ 0.9676 ☐

b) Calcule a probabilidade do tempo entre duas ocorrências de ordens de compra de acções da Google ser superior a 15 minutos.

0.2231 ☐ 0.1084 ☐ **0.4724** ☐ 0.5276 ☐

c) Tendo sido registados 5 períodos de tempo entre duas ocorrências de ordens de compra de acções da Google, calcule a probabilidade do maior período de tempo ser inferior a 1 hora.

4. O número de "amigos", na rede social Facebook, dos utilizadores do sexo feminino tem distribuição normal com média 250 e variância 2025. O número de "amigos" dos utilizadores do sexo masculino também tem distribuição normal, mas com média 230 e variância 1600. Seleccionada uma amostra casual de 20 utilizadores do sexo feminino e 20 utilizadores do sexo masculino, calcule a probabilidade da diferença entre as médias do número de "amigos" das duas amostras ser superior a 30.

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – 1º sem 2012-2013 **28. 01. 13**

Exame Época Recurso

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(20)	2a.(20)	3a.(10)	3c.(15)	4.(15)	T:
1b.(10)	2b.(20)	3b.(10)			P:

1. A percentagem de estudantes do ISEG apreciadores da banda *Radiohead é de* 40%. Entre os estudantes apreciadores dos *Radiohead*, 80% também são apreciadores da banda *Arcade Fire*. Por outro lado, entre os estudantes que não apreciam os Radiohead, apenas 10% gostam dos *Arcade Fire*.

a) Qual a probabilidade de um estudante do ISEG escolhido ao acaso ser apreciador da banda *Arcade Fire*?

b) Escolhidos ao acaso 10 estudantes do ISEG, qual a probabilidade de pelo menos 6 serem apreciadores da banda Radiohead?

0.7993 ☐ **0.1662** ☐ 0.8885 ☐ 0.0548 ☐

2. Sejam *X* e *Y* a rendibilidade e volatilidade (em dezenas de pontos percentuais) de uma acção, respectivamente. Assuma que para o conjunto de accções listadas na NYSE, a função densidade de probabilidade conjunta de *X* e *Y* é dada por:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{x+y}{15}, \qquad (0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 5).$$

a) Calcule a rendibilidade média das acções listadas na NYSE.

b) Calcule a volatilidade média das acções com rendibilidade nula.

3. Numa determinada corretora, a ocorrência de ordens de compra de acções da empresa Google segue um processo de Poisson com média de 3 por hora.

a) Calcule a probabilidade de entre as 8h00 e as 12h00 serem solicitadas mais de 10 ordens de compra de acções da Google.

0.9126 ☐ 0.8952 ☐ 0.7576 ☐ **0.6528** ☐

b) Calcule a probabilidade do tempo entre duas ocorrências de ordens de compra de acções da Google ser superior a 45 minutos.

0.2231 ☐ **0.1054** ☐ 0.7769 ☐ 0.8946 ☐

c) Tendo sido registados 5 períodos de tempo entre duas ocorrências de ordens de compra de acções da Google, calcule a probabilidade do maior período de tempo ser inferior a 1 hora.

4. O número de "amigos", na rede social Facebook, dos utilizadores do sexo feminino tem distribuição normal com média 250 e variância 2025. O número de "amigos" dos utilizadores do sexo masculino também tem distribuição normal, mas com média 230 e variância 1600. Seleccionada uma amostra casual de 20 utilizadores do sexo feminino e 20 utilizadores do sexo masculino, calcule a probabilidade da diferença entre as médias do número de "amigos" das duas amostras ser superior a 30.