Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2011/2012
Época Normal: 3 de Janeiro de 2012
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(3,5) 1. Considere os conjuntos $A = \{\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) + \cos(n\pi)\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R} : e^x \geq e^{-x}\right\}$.

(a) Escreva o conjunto B como intervalo ou união de intervalos e indique o conjunto dos pontos de acumulação de $A \cup B$.

(b) Indique o supremo, ínfimo, máximo e mínimo, caso existam, do conjunto A.

(2,0) 2. Utilizando o princípio da indução matemática, prove que $n^2 + 3n + 1$ é um número ímpar, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(3,5) 3. (a) Calcule $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\sin x}$.

(b) Calcule a área da figura plana limitada por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3x+2}$.

(4,5) 4. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função tal que

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} + a & \text{se } x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x \sin(t)\cos(t)dt & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Determine, caso exista, um valor para a de forma a que $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(b) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists a \in \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável em x=0.}$$

(c) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$.

(2,5) 5. Seja f uma função contínua e crescente em $[1, +\infty[$. Utilize o teorema de Lagrange para provar que, para todo $x \geq 1$

$$(x-1)f(1) \leq \int_1^x f(t)dt \leq (x-1)f(x).$$

(2,0) 6. Estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha(e^x - 1)}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx.$$

(2,0) 7. Seja f uma função diferenciável para a qual se tem $f(0) = f'(0) = 0$ e f' estritamente monótona. Sendo $g(x) = 2\tan(f(x)) - f(x)$, prove que $g(0)$ é um extremo local de g.