Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

Época Normal: 14/01/09 - algumas soluções e sugestões

1. a) (com $k \in N_0$) $u_n = \begin{cases} 2^k & \text{se } n = 3k+1 \\ \frac{n+1}{n+2} & \text{se } n = 3k+2 \\ -\frac{n}{n-1} & \text{se } n = 3k+3 \end{cases}$

   Sublimites $\{-1, 1, +\infty\}$;

   b)$MinA =]-\infty, -3/2]$, $MajA = \emptyset$; $intB = \emptyset$; $ad(B) = [1+\sqrt{2}, +\infty[$;

2. a) $\int_{\pi/4}^{\pi} \sin^2(x)dx$; $P(\sin^2(x)) = P(\sin x \times \sin x)$- faz-se por partes -ver aula! R: $3/8\pi + 1/4$;

   b) Por substituição fazer $x = t^6$ calcular $P(\frac{6t^5}{t^3+t^2})$; daqui para a frente primitivação de funções racionais!

3. b) $f'(0^+) = f'(0^-)$; por definição, naturalmente! $f'(0^+) = 0$, $f'(0^-) = k$; portanto $k = 0$; Recta $y = 0$;

   c) proposição verdadeira; (a proposição diz q f é crescente em $\mathbb{R}^+$; basta provar q f' é positiva em $\mathbb{R}^+$);

4. a) sim;

5. Pontos impróprios $+\infty$ e 1; o integral $\int_1^2 \frac{x+1}{x^\alpha(x-1)^{2\beta-\alpha}}dx$ tem a mesma natureza que $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2\beta-\alpha}}$ (provar!) e este converge sse $2\beta-\alpha < 1$; o integral $\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x^\alpha(x-1)^{2\beta-\alpha}}dx$ tem a mesma natureza que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{2\beta-1}}$ (provar!) e este converge sse $2\beta - 1 > 1$; portanto o integral dado converge sse $\alpha > 2\beta - 1$ e $\beta > 1$;

6. $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \int_0^{\frac{1}{x}} f(t)dt\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(1+\int_0^{\frac{1}{x}} f(t)dt\right)^x} = e^{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\int_0^{\frac{1}{x}} f(t)dt\right)}$.

   Agora $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \int_0^{\frac{1}{x}} f(t)dt\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\int_0^{\frac{1}{x}} f(t)dt\right)}{1/x}$, aplica-se a regra de Cauchy e obtém-se $f(0)$; logo o limite pedido é $e^{f(0)}$.