Análise Matemática 2

João Janela & Fátima Fabião

jjanela@iseg.utl.pt;mabiao@iseg.utl.pt

Versão em actualização (5 de Dezembro de 2013)

Outono 2013

Resumo

Análise em $\mathbb{R}^n$

- Optimização livre em $\mathbb{R}^n$

Análise Complexa

- Estrutura algébrica e topológica de $\mathbb{C}$
- Funções de variável complexa

Fórmula de Taylor

Teorema

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$ pontos de D tais que o segmento $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}] \subset D$, p um inteiro positivo e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^p em D.
Então existe $\theta \in]0,1[$ tal que:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) =& f(\boldsymbol{a}) + f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + \frac{1}{2!}f''(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^2 + \cdots + \\ & \frac{1}{(p-1)!}f^{(p-1)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^{p-1} + \frac{1}{p!}f^{(p)}(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}^p. \end{aligned}$$

Observação

Dado que f é de classe C^p num aberto que contém $\boldsymbol{a}$, o resto pode assumir a forma $R_p(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{p!}f^{(p)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^p + o(\|\boldsymbol{h}\|^p)$.

Extremos

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dizemos que $\boldsymbol{a} \in D$ é um maximizante (resp. minimizante) absoluto ou global de f se

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a}), \forall \boldsymbol{x} \in D \qquad (resp.\ f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a}), \forall \boldsymbol{x} \in D)$$

Ao valor de $f(\boldsymbol{a})$ chamamos máximo (resp. mínimo) absoluto de f em D.

Definição

Nas mesmas condições da definição anterior, um ponto $\boldsymbol{a} \in D$ diz-se um extremaste (maximizaste ou minimizante) relativo ou local de f se for extremaste global nalgum conjunto aberto que o contenha. O valor de $f(\boldsymbol{a})$ é designado por extremo (máximo ou mínimo) relativo de f.

Condição necessária de extremante

Teorema

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to R$. Se f é diferenciável em $\boldsymbol{a} \in intD$ e $f(\boldsymbol{a})$ é um extremo (local) de f então tem-se

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}, \quad i.e. \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Definição

Os pontos $\boldsymbol{a}$ que verifiquem a condição $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ são designados **pontos críticos**, **pontos estacionários** *ou* **pontos de estacionaridade** *de f.*

Definição

Os pontos críticos que não sejam extremantes são designados **pontos sela**.

Exemplo

O único ponto crítico de $f(x,y) = x^2 + y^2$ *é o ponto* $(0,0)$*. Como* $f(0,0) = 0$ *e* $f(x,y) \geq 0, \forall x, y$ *concluímos que 0 é mínimo global de* f*.*

Exemplo

O único ponto crítico de $f(x,y) = -x^4 - y^4$ *é o ponto* $(0,0)$*. Como* $f(0,0) = 0$ *e* $f(x,y) \leq 0, \forall x, y$ *concluímos que 0 é máximo global de* f*.*

Exemplo

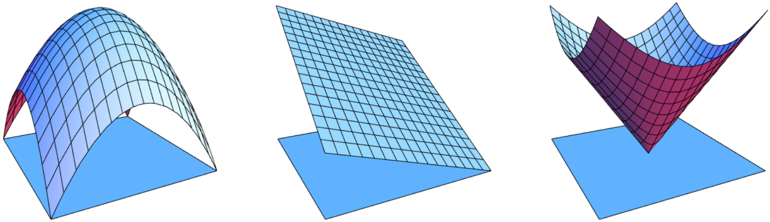
O único ponto crítico de $f(x,y) = x^3 + y^3$ *é o ponto* $(0,0)$*. Como* $f(0,0) = 0$ *mas em qualquer vizinhança desse ponto a função assume valores maiores e menores que 0, o ponto é um ponto de sela (não é maximizante nem minimizante).*

Caracterização dos extremantes de funções contínuas

Teorema

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então os extremantes de f apenas podem ser:

1. *Pontos críticos de f no interior de D.*
2. *Pontos da fronteira de D.*
3. *Pontos onde f não seja diferenciável.*



Classificação de ponto críticos

Teorema (Critérios de segunda ordem)

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 em D, $\boldsymbol{a} \in intD$ um ponto crítico e $H_f(\boldsymbol{a})$ a matriz Hesseana no ponto $\boldsymbol{a}$. Então

- *Se $H(\boldsymbol{a})$ for definida positiva, $\boldsymbol{a}$ é um minimizante local.*
- *Se $H(\boldsymbol{a})$ for definida negativa, $\boldsymbol{a}$ é um maximizante local.*
- *Se $H(\boldsymbol{a})$ for indefinida, $\boldsymbol{a}$ é um ponto de sela.*
- *Se $\boldsymbol{a}$ for maximizante $H(\boldsymbol{a})$ é definida ou semidefinida negativa.*
- *Se $\boldsymbol{a}$ for minimizante $H(\boldsymbol{a})$ definida ou semidefinida positiva.*
- *Se $H(\boldsymbol{a})$ for semidefinida nada se pode concluir.*

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *diz-se:*

- *Definida positiva se* $\boldsymbol{x}^T A\, \boldsymbol{x} > 0, \forall \boldsymbol{x} \neq 0$.
- *Definida negativa se* $\boldsymbol{x}^T A\, \boldsymbol{x} < 0, \forall \boldsymbol{x} \neq 0$.
- *Semidefinida positiva se* $\boldsymbol{x}^T A\, \boldsymbol{x} \geq 0, \forall \boldsymbol{x}$ *mas existe* $\boldsymbol{y} \neq 0$ *tal que* $\boldsymbol{y}^T A\, \boldsymbol{y} = 0$.
- *Semidefinida positiva se* $\boldsymbol{x}^T A\, \boldsymbol{x} \leq 0, \forall \boldsymbol{x}$ *mas existe* $\boldsymbol{y} \neq 0$ *tal que* $\boldsymbol{y}^T A\, \boldsymbol{y} = 0$.
- *Indefinida se existem* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ *tais que* $\boldsymbol{x}^T A\, \boldsymbol{x} > 0$ *e* $\boldsymbol{y}^T A \boldsymbol{y} < 0$.

Teorema (Classificação através de valores próprios)

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica com com valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Então a matriz A é

- *definida positiva se e só se $\lambda_i > 0, i = 1, \cdots n$.*
- *definida negativa se e só se $\lambda_i < 0, i = 1, \cdots n$.*
- *semidefinida positiva se e só se $\lambda_i \geq 0, i = 1, \cdots n$ e pelo menos um deles é nulo.*
- *semidefinida negativa se e só se $\lambda_i \leq 0, i = 1, \cdots n$ e pelo menos um deles é nulo.*
- *indefinida se e só se existem valores próprios de sinais diferentes.*

Proposição

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *uma matriz simétrica e* $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n \in \mathbb{R}$ *a sua cadeia de determinantes dos menores principais. Então:*

1. *Se* $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \cdots, \Delta_n > 0$ *então* A *é definida positiva.*
2. *Se* $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \cdots, (-1)^n\Delta_n > 0$ *então* A *é definida positiva.*
3. *Se* $\Delta_n \neq 0$ *e não se verifica (1) nem (2) então* A *é indefinida.*
4. *Não se verificando nenhuma das hipóteses anteriores,* A *pode ser indefinida ou semidefinida.*

Exemplo

Exemplo

Determinar os extremantes de

$$f(x,y) = x^3y^2(6-x-y), \quad x>0,\ y>0$$

Como f é diferenciável no conjunto aberto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ os extremantes, a existirem, serão pontos críticos de f.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y^2(6-x-y) - x^3y^2 = 0 \\[2ex] 2yx^3(6-x-y) - x^3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Exemplo (cont.)

$$\left\{\begin{array}{l} x^2y^2(18-3x-3y-x)=0 \\ \\ yx^3(12-2x-2y-y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} x=0 \\ \\ y\in\mathbb{R} \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{c} y=0 \\ \\ x\in\mathbb{R} \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{c} 18-4x-3y=0 \\ \\ 12-2x-3y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} x=0 \\ \\ y\in\mathbb{R} \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{c} y=0 \\ \\ x\in\mathbb{R} \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{c} x=3 \\ \\ y=2 \end{array}\right.$$

Assim, o único ponto crítico de f no conjunto D é o ponto $(3,2)$.

Exemplo(cont.)

Para classificar este ponto crítico vamos estudar o comportamento da matriz Hesseana. Neste caso,

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} (-12x^2y^2 - 6xy^3 + 36xy^2) & (-8x^3y - 9x^2y^2 + 36x^2y) \\ \cdot & (12x^3 - 2x^4 - 6x^3y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H(3,2) = \begin{pmatrix} -144 & -108 \\ -108 & -162 \end{pmatrix}$$

Uma vez que $\Delta_1 = -144 < 0$ e $\Delta_2 = 11644 > 0$, concluímos que $H(3,2)$ é definida negativa e por isso (3,2) é maximizante local de f.

Critérios de ordem superior

Tal como em $\mathbb{R}$, nos casos em que os critérios de ordem dois não são conclusivos, pode ser útil considerar critérios de ordem mais elevada.

Teorema

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $C^p(D)$, $\boldsymbol{a} \in intD$ *e* $p \in \mathbb{N}$ *tais que:*

$$f'(\boldsymbol{a}) = 0, \cdots, f^{(p-1)}(\boldsymbol{a}) = 0, f^{(p)}(\boldsymbol{a}) \neq 0$$

Então

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{p!} f^{(p)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^p + o(\|\boldsymbol{h}\|^p)$$

Isto é, para $\boldsymbol{h}$ suficientemente pequeno, o sinal dos acréscimos é determinado pelo sinal de $f^{(p)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^p$.

Critérios de ordem superior (cont.)

Nas condições do teorema anterior podemos afirmar que:

1. Se $\underline{p}$ for ímpar, $\boldsymbol{a}$ não é extremante local (trata-se de um ponto de sela).
2. Se $\underline{p}$ for par e se
   a) $f^{(p)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^p$ é positivo para todos os $\boldsymbol{h} \neq 0$ (forma de grau p definida positiva), então $\boldsymbol{a}$ é ponto de mínimo local;
   b) $f^{(p)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^p$ é negativo para todos os $\boldsymbol{h} \neq 0$ (forma de grau p definida negativa), então $\boldsymbol{a}$ é ponto de máximo local;
   c) $f^{(p)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^p$ é positivo para certos $\boldsymbol{h} \neq 0$ e negativo para outros (forma de grau p indefinida), então $\boldsymbol{a}$ não é extremante local (ponto de sela);

Critérios de ordem superior (cont.)

d) $f^{(p)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^p \geq 0$ mas existem $\boldsymbol{h}_0 \neq 0$ constituindo direcções singulares, isto é, tais que $f^{(p)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}_0^p = 0$ (forma de grau p semidefinida positiva), então

- d1) se existir uma direcção singular, $\boldsymbol{h}_0 \neq 0$, para a qual a ordem m do primeiro dos diferenciais que não se anulam em $\boldsymbol{h}_0$ $(m > n)$ ou é ímpar ou, no caso de ser par, $f^{(m)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}_0^m < 0$, então $\boldsymbol{a}$ não é extremante local (ponto de sela);

- d2) se, qualquer que seja a direcção singular, $\boldsymbol{h}_0 \neq$, a ordem m do primeiro dos diferenciais que não se anulam em $\boldsymbol{h}_0$ $(p > n)$ é par e, além disso, $f^{(m)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}_0^m > 0$, então nada se conclui (podendo o caso ser esclarecido por um estudo directo);

Critérios de ordem superior (cont.)

e) $f^{(p)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^p \leq 0$ mas existem $\boldsymbol{h}_0 \neq 0$ constituindo direcções singulares, isto é, tais que $f^{(p)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}_0^p = 0$ (forma de grau p semidefinida negativa), então

e1) se existir uma direcção singular, $\boldsymbol{h}_0 \neq 0$, para a qual a ordem m do primeiro dos diferenciais que não se anulam em $\boldsymbol{h}_0$ $(m > n)$ ou é ímpar ou, no caso de ser par, $f^{(m)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}_0^m > 0$, então $\boldsymbol{a}$ não é extremante local (ponto de sela);

e2) se, qualquer que seja a direcção singular, $\boldsymbol{h}_0 \neq$, a ordem m do primeiro dos diferenciais que não se anulam em $\boldsymbol{h}_0$ $(p > n)$ é par e, além disso, $f^{(m)}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}_0^m < 0$, então nada se conclui (podendo o caso ser esclarecido por um estudo directo);

Exemplo

Determinemos os extremantes da função

$$f(x,y) = x^4 + 3y^4 - 2(x+3y)^2$$

(1) *Determinação dos pontos críticos de* f:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4(x+3y) = 0 \\ \\ 12y^3 - 12(x+3y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - (x+3y) = 0 \\ \\ y^3 - (x+3y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 0 \\ \\ y^3 - (x+3y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \\ y^3 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \\ y = 0 \vee y = \pm 2 \end{cases}$$

Então os pontos críticos são $(0,0), (2,2)$ e $(-2,-2)$.

(2) *Classificação dos pontos críticos*:
A matriz hessiana é

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & -12 \\ \\ -12 & 36y^2 - 36 \end{bmatrix}.$$

(2 i) Nos pontos $(2,2)$ e $(-2,-2)$ a cadeia de menores é $\Delta_1 = 44$ e $\Delta_2 = 4608$ e, portanto, $f''(2,2)$ e $f''(-2,-2)$ são ambas formas quadráticas definidas positivas. Então, estamos no caso $2.b)$ do teorema, podendo concluir-se que $(2,2)$ e $(-2,-2)$ são minimizantes locais de f.

(2 ii) Ponto $(0,0)$.

No ponto $(0,0)$, os valores próprios são $\lambda_1 = -40$ e $\lambda_2 = 0$, pelo que $H(0,0)$ é semidefinida negativa e, portanto, não se pode ainda tirar uma conclusão.

Procuremos as direcções singulares. Seja $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$. A expressão

$$\begin{aligned} f''(0,0)\boldsymbol{h}^2 =& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)h_2^2 \\ =& -4 \times h_1^2 - 24 h_1 h_2 - 36 \times h_2^2 \\ =& -4(h_1 + 3h_2)^2 \ \leq \ 0, \end{aligned}$$

mostra que $D^2 f(0,0)$ é semidefinida negativa, anulando-se na direcção singular $\mathbf{h}_0 = (h_1, h_2)$ em que $h_1 = -3h_2$. Então estamos no caso $2.e)$ do teorema, mas há que averiguar se estamos em (e_1) ou (e_2).

Vejamos então qual a expressão de $f'''(0,0)$ ao longo da direcção singular $\boldsymbol{h}_0 = (-3h_2, h_2)$. Ora,

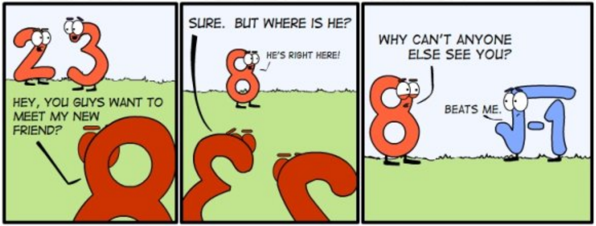
$$\begin{aligned} f'''(0,0)(-3h_2,h_2) =& \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)(-3h_2)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0)(-3h_2)^2 h_2 \\ & + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0)(-3h_2){h_2}^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)h_2^3 \\ =& 0 \end{aligned}$$

Uma vez que todas as derivadas parciais de terceira ordem no ponto $(0,0)$ são nulas, ainda nada se pode concluir. Passemos então ao estudo do sinal de $f^{(4)}(0,0)$ ao longo da direcção singular $\boldsymbol{h}_0 = (-3h_2, h_2)$. Tem-se,

$$f^{(4)}(0,0)(-3h_2,h_2) = 24(-3h_2)^4 + 72{h_2}^4 > 0, \qquad \text{se } \mathrm{h}_2 \neq 0,$$

Assim, verifica-se o caso (e_1), pelo que $(0,0)$ não é extremante local, é ponto de sela.

Números Complexos



"Timeline"

665. Brahmagupta escreve *Khandakhadyaka*, onde resolve equações quadráticas em que permite a existência de soluções negativas.

1545. Girolamo Cardano publica *Ars Magna*, onde descreve a solução geral de equações do terceiro grau. Usa números complexos enquanto fórmulas de cálculo para encontrar todas as soluções (mesmo as reais).

1572. Rafael Bombelli publica *Algebra*. Usa raízes quadradas de números negativos.

1637. Descartes usa pela primeira vez o termo "números imaginários".

1673. John Wallis desenvolve a representação geométrica de números complexos (J.R. Argand, 1806 ...).

1748. Euler publica *Introductio in analysin infinitorum*, onde apresenta desenvolvimentos em série para e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e deduz a fórmula $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$.

"Timeline" (cont.)

1777. Euler consagra o símbolo $i = \sqrt{-1}$ e escreve a famosa fórmula $e^{i\pi} + 1 = 0$, que envolve algumas das mais importantes constantes matemáticas.

1814. Augustin-Louis Cauchy desenvolve a primeira teoria consistente de funções de variável complexa.

1830 De Morgan escreve a obra *Trigonometry and Double Algebra*, onde relaciona as regras operatórias para números reais e complexos.

1835 Hamilton, na obra *Theory of Algebraic Couples* descreve a álgebra dos números complexos como a álgebra dos pares $x + iy$.

- A partir daí os números complexos e a análise complexa assumem o aspecto que hoje conhecemos, com importantes aplicações às equações algébricas, equações diferenciais, mecânica, electromagnetismo, electrónica, etc.

Números Complexos

Definição (Corpo dos números complexos)

Designaremos por conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, o conjunto $\mathbb{R}^2$ dos pares ordenados, munido das operações de soma $(+)$ e produto $(\cdot)$ definidas por

1. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
2. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

O triplo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ possui uma estrutura de corpo.

Designando $i = (0, 1)$ e identificando cada $(a, 0)$ com o número real a, podemos escrever $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$. Nesse caso os números a e b são designados por **Parte Real** e **Parte Imaginária**, respectivamente. Considerando um complexo genérico, $z = a + bi$, escrevemos

$$\operatorname{Re} z = a \quad , \quad \operatorname{Im} z = b.$$

Observação

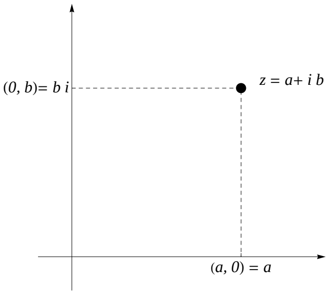
A soma e produto de números complexos na forma $a+bi$ podem ser realizadas segundo as mesmas regras do produto e soma em $\mathbb{R}$, tendo em conta que $i^2=-1$.

Exemplo

$$\begin{aligned}(3+4i)\cdot(2-i) =& 3\times 2+3\times(-i)+(4i)\times 2+(4i)\times(-i)\\ & 6-3i+8i-4i^2\\ & 6-3i+8i+4=10+5i\end{aligned}$$

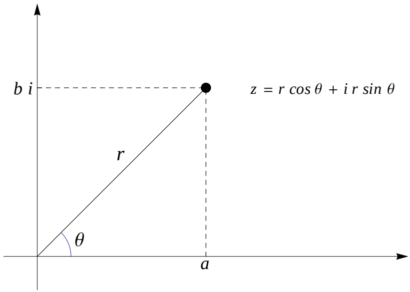
Plano de Argand: Forma Cartesiana e forma polar

Os números complexos são identificáveis com pontos de $\mathbb{R}^2$. Quando representamos números complexos no plano, este é designado **Plano de Argand**.



$$z = a + bi$$

Forma cartesiana



$$z = r\cos\theta + ir\mathrm{sen}\,\theta$$

Forma polar

Ao número $r \in \mathbb{R}_0^+$ chamamos **módulo** do número complexo z e tem-se

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ao número $\theta \in \mathbb{R}$ chamamos **argumento** de z e tem-se

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{se } a > 0 \\ \pi/2 & \text{se } a = 0 \wedge b > 0 \\ \pi + \arctan(b/a) & \text{se } a < 0 \\ -\pi/2 & \text{se } a = 0 \wedge b < 0 \end{cases}$$

Para representar um número complexo na forma polar usamos a notação

$$re^{i\theta} := r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Igualdade de números complexos

Proposição

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *cujas formas cartesianas e polares são*

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$$

e

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}.$$

Então:

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2$
2. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \quad \wedge \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Complexo conjugado

Definição

Sendo $z = a + bi$, o seu **complexo conjugado** *é o número complexo*

$$\bar{z} = a - bi$$

São válidas as seguintes propriedades:

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

Propriedades do módulo

Proposição

Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ *temos*

1. $|z| \geq 0$ *e* $|z| = 0$ *se e só se* $z = 0$.
2. $|zw| = |z||w|$.
3. $|z + w| \leq |z| + |w|$.

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$$

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 =& (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\
=& z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\
=& |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w}) \\
\leq& |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

Inverso multiplicativo

Devido à sua estrutura de corpo, sabemos que qualquer complexo $z \neq 0$ deve ter um inverso multiplicativo, i.e.

$$\forall z \neq 0 \quad \exists^1 w \in \mathbb{C} : zw = wz = 1$$

Quando existe, o inverso multiplicativo de z designa-se por z^{-1}.

Proposição

Seja $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. O seu inverso multiplicativo é dado por

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

Definição (Divisão de números complexos)

Definimos o quociente de dois números complexos como sendo:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{|z_2|^2} \qquad (z_2 \neq 0)$$

Produto, quociente e potência na forma polar

Proposição

Sejam $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. *Então*

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $z_1/z_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \qquad z_2 \neq 0$
- $z_1^k = r_1^k e^{ik\theta_1}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
(1+i)^{10} &= \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} \\
&= (\sqrt{2})^{10} e^{i\frac{10\pi}{4}} = 32(\cos\frac{5\pi}{2} + i\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{2}) \\
&= 32i
\end{aligned}
$$

Raízes de números complexos

Definição

Dado $k \in \mathbb{N}$ chamamos raiz de ordem k de $z \in \mathbb{C}$ a qualquer complexo w que verifique a condição $w^k = z$. Nesse caso usamos a notação convencional $w = \sqrt[k]{z}$.

Proposição

Seja $k \in \mathbb{N}$ e $z = re^{i\theta}$. O número complexo z tem exactamente k raízes distintas de ordem k, dadas por

$$\sqrt[k]{z} = r^{1/k} e^{i(\theta + 2\pi j)/k}, \quad j = 0, \cdots, k-1$$

Observação

As raízes de ordem k de um número complexo formam um polígono regular inscrito num círculo de raio $|z|^{1/k}$ centrado na origem.

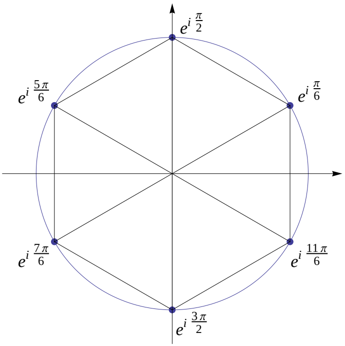
Exemplo

Cálculo das raízes de ordem 6 de -1

$$\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{e^{i\pi}}$$
$$= e^{i(\pi+2k\pi)/6}, \quad k = 0, \cdots, 5$$

Isto é, as raízes de ordem 6 de $z = -1$ são os números complexos

$$e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{i5\pi/6}, e^{i7\pi/6}, e^{i3\pi/2}, e^{i11\pi/6}$$



ISEG U LISBOA UNIVERSIDADE DE LISBOA

Topologia em $\mathbb{C}$

Definição

Chamamos vizinhança de raio $r \in \mathbb{R}^+$ *de* $z_0 \in \mathbb{C}$ *ao conjunto*

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

Observação

Com esta definição de vizinhança, todas as propriedades topológicas de um conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *são idênticas às do conjunto*

$$\Omega^* = \{(a, b) : a + ib \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

para a topologia usual de $\mathbb{R}^2$*, i.e., a topologia induzida pela norma euclideana.*

Noções topológicas: definições

Definição (Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.)

- $z_0 \in \mathbb{C}$ *é um* **ponto interior** *a* Ω *se existir* $r > 0$ *tal que* $D_r(z_0) \subseteq \Omega$.
- $z_0 \in \mathbb{C}$ *é um* **ponto exterior** *de* Ω *se existir* $r > 0$ *tal que* $D_r(z_0) \subseteq \Omega^C$.
- $z_0 \in \mathbb{C}$ *é um* **ponto fronteiro** *a* Ω *se para todo o* $r > 0$ $D_r(z_0) \cap \Omega \neq \emptyset$ e $D_r(z_0) \cap \Omega^C \neq \emptyset$
- $z_0 \in \mathbb{C}$ *é um* **ponto aderente** *a* Ω *se para todo o* $r > 0$ $D_r(z_0) \cap \Omega \neq \emptyset$
- $z_0 \in \mathbb{C}$ *é um* **ponto de acumulação** *de* Ω *se para todo o* $r > 0$ *se tiver* $D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \cap \Omega \neq \emptyset$

O conjunto dos pontos interiores, exteriores, fronteiros, aderentes e de acumulação de Ω *são designados por* $Int\Omega, Ext\Omega, Fr\Omega, Ad\Omega$ *e* Ω'*, respectivamente.*

Definição (Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.)

- Ω *é* **aberto** *se* $\Omega = Int\Omega$.
- Ω *é* **fechado** *se* $\Omega = Ad\Omega$.
- Ω *é* **limitado** *se existir* $r > 0$ *tal que* $\Omega \subseteq D_r(0)$.
- Ω *diz-se* **compacto** *se for limitado e fechado.*
- Ω *diz-se* **conexo** *se não for possível escrever* $\Omega = (\Omega \cap A) \cup (\Omega \cap B)$ *com* A, B *subconjuntos não vazios de* $\mathbb{C}$*, disjuntos, ambos abertos ou ambos fechados.*
- Ω *diz-se uma* **região** *ou* **domínio** *se for um conjunto aberto e conexo.*

Sucessões de números complexos

Definição

Dizemos que (z_n) *é uma sucessão convergente se existe* $z \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_p \quad n \geq p \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon$$

Proposição

1. $\lim z_n = z \Leftrightarrow \lim |z_n - z| = 0$
2. *Sendo* $z_n = a_n + ib_n$ e $z = a + ib$ *temos que* $\lim z_n = z$ *se e só se* $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$.

Séries de números complexos

Definição

A série $\sum_{n\geq 1} z_n$ diz-se convergente se for convergente a sucessão das somas parciais $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$. Se a série não for convergente diz-se divergente.

Proposição

Uma série $\sum z_n$, com $z_n = a_n + ib_n$, é convergente se e só se forem convergentes as séries reais $\sum a_n$ e $\sum b_n$. Em caso de convergência, se $\sum a_n = a$ e $\sum b_n = b$, temos $\sum z_n = a + ib$.

Proposição (Série geométrica)

A série $\sum_{n\geq p} z^n$ é convergente se e só se $|z| < 1$ e, nesse caso, tem-se

$$\sum_{n\geq p} z^n = \frac{z^p}{1-z}.$$

Funções complexas

Definição

Chama-se **função complexa de variável complexa** *a qualquer correspondência* $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, que associa a cada ponto* $z \in \mathbb{C}$ *um e um só ponto* $w = f(z) \in \mathbb{C}$*. Ao conjunto* Ω *chamamos* **domínio** *de* f *e ao conjunto* $f(\Omega) = \{f(z) : z \in \Omega\}$ *chama-se* **contradomínio** *de* f*.*

Definindo $\Omega^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Omega\}$, qualquer função complexa de variável complexa se pode escrever na forma

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

em que $u, v : \Omega^* \to \mathbb{R}$. Deste modo f identifica-se com uma função vectorial de Ω em $\mathbb{R}^2$. Sempre que daí não resultar qualquer ambiguidade, dizemos indistintamente que u, v estão definidas em Ω ou em Ω^*.

Exemplos de funções de variável complexa: $f(z) = z^2$

Neste caso temos que

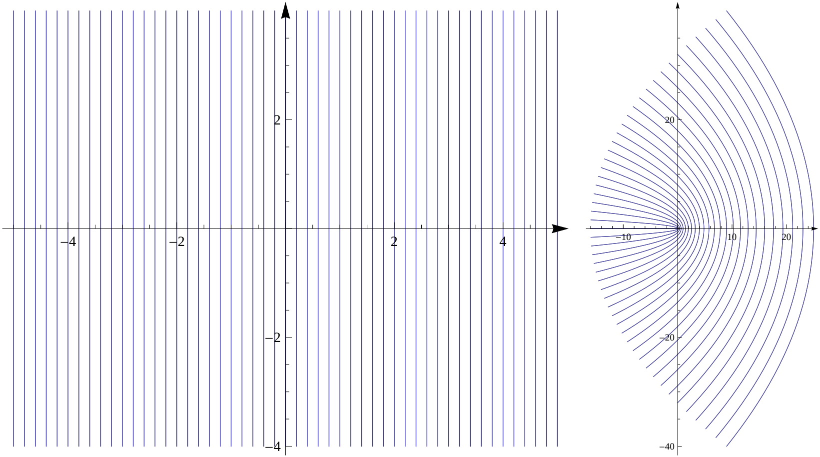
$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + \underbrace{2xy}_{v(x,y)}\, i$$

ou, na forma polar,

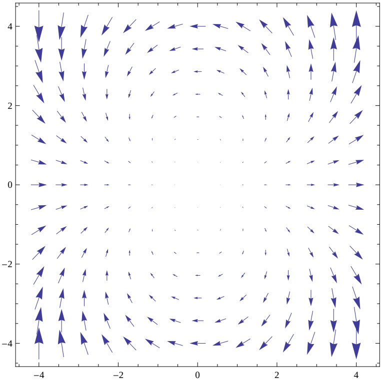
$$f(re^{i\theta}) = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta}$$

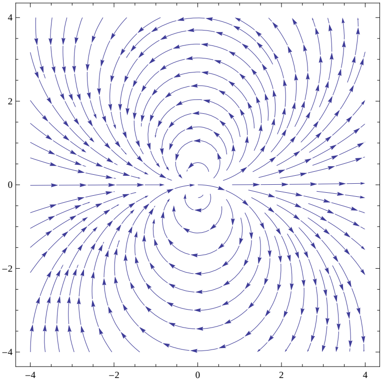
.

Apesar de não existir a possibilidade de representar o gráfico de f, sendo isomorfa a uma correspondência de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, podemos ver como é que f transforma conjuntos do plano.



Algumas rectas verticais e respectiva imagem através da função $f(z) = z^2$


4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4


4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4

funções de variável complexa: $f(z) = e^z$

Definição

Chama-se função exponencial à função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ determinada por

$$f(x+iy) = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y) := e^z$$

Proposição (São válidas as seguintes propriedades)

i) $e^z \neq 0.$

ii) $e^{z+w} = e^z e^w.$

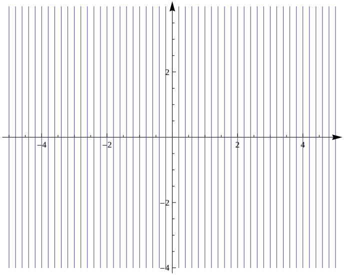
iii) $e^{\overline{z}} = \overline{(e^z)}.$

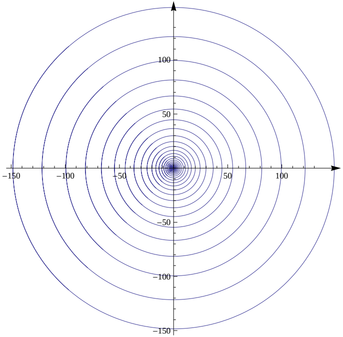
iv) $|e^z| = e^{Rez}.$

v) $Arg(e^z) = Imz + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

vi) e^z *é periódica de período* $2\pi i.$

vii) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}.$





Algumas rectas verticais e respectiva imagem através da função $f(z) = e^z$

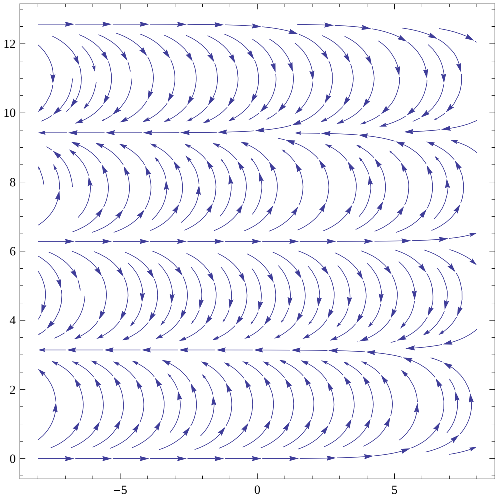


Figura : Linhas de corrente do campo vectorial $(u(x,y), v(x,y)) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$

Função logaritmo

Teorema

Seja $A_r = \{x + iy : r \leq y < r + 2\pi\}$*, onde* r *é uma constante real. Então* $f : A_r \to \mathbb{C}$ *tal que* $z \mapsto f(z) = e^z$ *é injectiva em* A_r *e tem-se* $f(A_r) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$*.*

Definição

Considerando o conjunto A_r *definido anteriormente, chama-se logaritmo relativo ao intervalo* $[r, r + 2\pi[$ *à função* $Log_r : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to A_r$ *definida por*

$$Log_r z = \log|z| + i\,Arg\,z, \quad Arg\,z \in [r, r + 2\pi[.$$

Quando nada é dito em contrário, assume-se que estamos a usar o **ramo principal** *do logaritmo, correspondente à escolha* $r = -\pi$*.*

Função Logaritmo

Proposição

Para qualquer ramo da função logaritmo são válidas as seguintes afirmações

i) $\forall z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad Log_r(zw) = Log_r z + Log_r w + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}.$

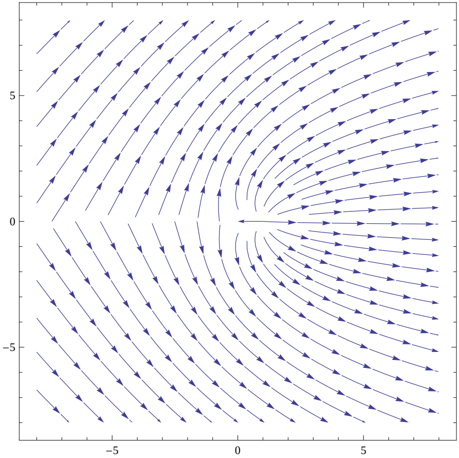
ii) $\forall z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad Log_r(z/w) = Log_r z - Log_r w + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}.$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad Log_r(z^n) = nLog_r z + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}.$

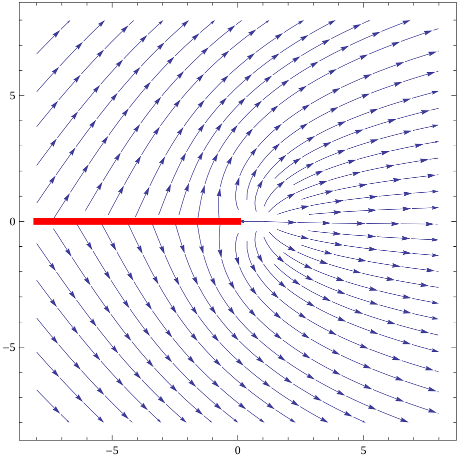
iv) $\forall z \in A_r \quad Log_r(e^z) = z$

v) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad e^{Log_r z} = z.$

"Representação gráfica" da função $Log_r z$.



"Representação gráfica" da função $Log_r z$.



Funções trigonométricas

Definição

As funções $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ *estão definidas em* $\mathbb{C}$, *sendo dadas pelas expressões*

$$\operatorname{sen} z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Proposição

São válidas em $\mathbb{C}$ *as seguintes igualdades:*

i) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1.$

ii) $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w.$

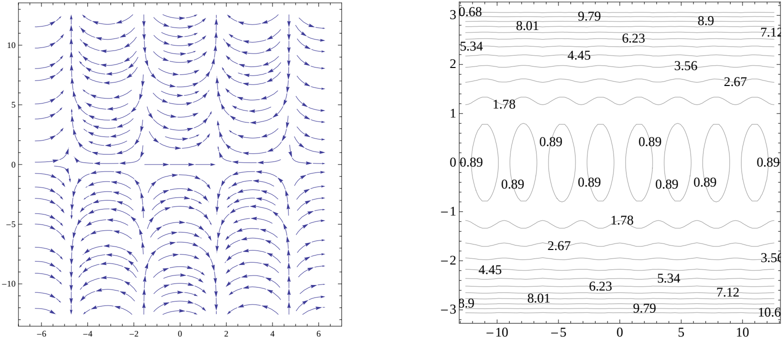
iii) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w.$

iv) $\operatorname{sen}(\pi - z) = \cos z.$

v) $\cos(\pi - z) = -\operatorname{sen} z.$

vi) $\operatorname{sen}(\pi/2 - z) = \cos z.$

vii) $\cos(\pi/2 - z) = \operatorname{sen} z.$



Linhas de corrente (esquerda) e módulo (direita) do campo vectorial $U(x,y) = (\mathrm{Re}\,\mathrm{sen}\,z, \mathrm{Im}\,\mathrm{sen}\,z)$

Funções potência e exponencial

Definição (Função Potência)

Para cada ramo do logaritmo define-se para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ a função

$$z^\alpha := e^{\alpha \, Log_r \, z}$$

Definição (Exponencial de base $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$)

Para cada ramo do logaritmo define-se

$$\alpha^z := e^{z \, Log_r \, \alpha}$$

Observação

$z^{\alpha+\beta} = z^\alpha \cdot z^\beta$ *mas, em geral,* $(\alpha\beta)^z \neq \alpha^z \beta^z$.

Outras funções

Definição (funções trigonométricas inversas)

$$\operatorname{arcsen} z = -iLog_r\left[iz + (1-z^2)^{1/2}\right]$$

$$\arccos z = -iLog_r\left[z + i(1-z^2)^{1/2}\right]$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2}Log_r\frac{i+z}{i-z}$$

Definição (Funções hiperbólicas)

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Limites de funções complexas

Definição

Dada uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *e um ponto* z_0*, aderente a* Ω *diz-se que o limite de* f *quando* z *tende para* z_0 *é* L*, e escreve-se* $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ *se*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} : z \in \Omega \cap D_\delta(z_0) \Rightarrow |f(z) - z_0| < \varepsilon$$

Proposição

Seja $f = u + iv$ *definida em* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *e* $z_0 = x_0 + iy_0$ *um ponto aderente a* Ω*. Então* $\lim_{z \to z_0} f(z) = A + iB$ *se e só se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = A \qquad e \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = B$$

Continuidade de funções complexas

Definição

Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. A função f diz-se contínua em z_0 se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Além disso f diz-se contínua em Ω se for contínua em todos os pontos de Ω.

Proposição

Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, com $f = u + iv$, e $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Então f é contínua em $z_0 = (x_0, y_0)$ se e só se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ forem contínuas em (x_0, y_0).

Exemplo: $f(z) = z^2$ é contínua em $\mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| =& |z^2 - z_0^2| = |(z - z_0)(z + z_0)| \\
\leq& |z - z_0| \cdot |z - z_0 + 2z_0| \\
\leq& |z - z_0| \cdot (|z - z_0| + 2|z_0|) \\
<& \delta(\delta + 2|z_0|)
\end{aligned}
$$

quando $|z - z_0| < \delta$. Assim, observando que $\delta(\delta + 2|z_0|) \to 0$ quando $\delta \to 0$, vemos que f é contínua em qualquer ponto $z_0 \in \mathbb{C}$.

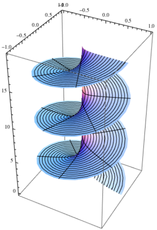
Observação

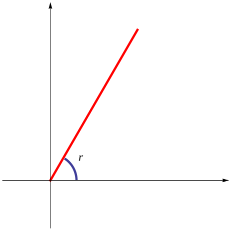
De modo semelhante se consegue demonstrar a continuidade em, $\mathbb{C}$ de qualquer potência e, consequentemente, de qualquer polinómio.

Exemplo: Continuidade de $f(z) = Logz$

A função $f(z) = Logz$ é contínua em $\mathbb{C}$ excepto $\mathbb{R}_0^-$. De facto, considerando um ponto $z_0 \in \mathbb{R}_0^-$, vemos que

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in 2^o Q}} Logz = \log|z_0| + i\pi, \qquad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in 3^o Q}} Logz = log|z_0| - i\pi$$





Funções Holomorfas

Definição

Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ com Ω aberto.

1. *A função f diz-se* **derivável** *em $z_0 \in \Omega$ se existe e é finito o limite*
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \stackrel{def}{=} f'(z_0).$$
2. *A função f diz-se* **Holomorfa** *em Ω se for derivável em todos os pontos de Ω. Uma função diz-se* **inteira** *se for holomorfa em $\mathbb{C}$ e designa-se por $H(\Omega)$ o conjunto das funções holomorfas em Ω.*
3. *Sendo A um qualquer subconjunto de $\mathbb{C}$, uma função diz-se holomorfa em A se for holomorfa num conjunto aberto que contenha A.*

Proposição (Sejam f, g funções holomorfas. Então:)

- *$f \pm g$ e fg são holomorfas e tem-se $(f \pm g)' = f' \pm g'$ e $(fg)' = f'g + fg'$*
- *f/g é holomorfa sempre que $g \neq 0$ e tem-se $(f/g)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.*
- *A função composta $f \circ g$ é holomorfa e tem-se $(f \circ g)'(z) = g'(z)f'(g(z))$.*
- *Se f for invencível a sua inversa também o é e tem-se*

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}, \quad w_0 = f(z_0).$$

Teorema

Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in int\Omega$. Se f é holomorfa em z_0 então é contínua em z_0.

Teorema

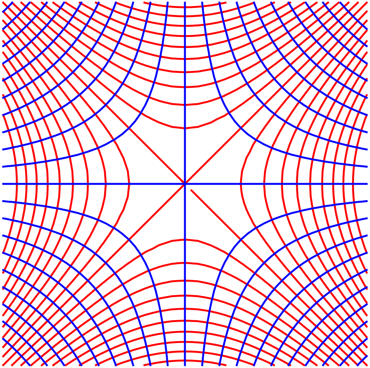
Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, com $f = u + iv$ e Ω aberto e $z_0 \in \Omega$. Se f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$ então são verificadas as **condições de Cauchy-Riemann***:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Dem: Calcular limite segundo rectas paralelas aos eixos coordenados.

Cond. de Cauchy-Riemann: Interpretação geométrica

Como consequência das equações Cauchy-Riemann, Se $f = u + iv$ for holomorfa, as curvas de nível de u são ortogonais às curvas de nível de v.

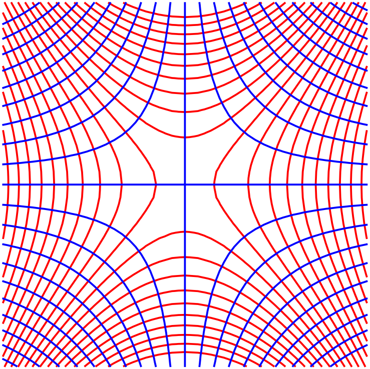


$$f(z) = z^2$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

$$v(x, y) = 2xy$$

Cond. de Cauchy-Riemann: Interpretação geométrica

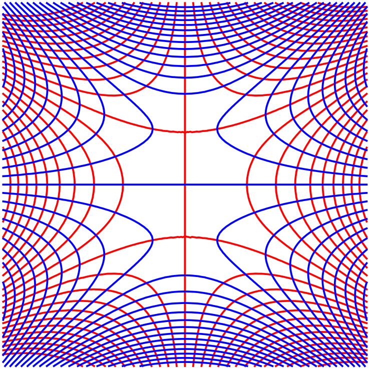


$$f(z) = \cos z$$

$$u(x, y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x$$

$$v(x, y) = -\frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x$$

Cond. de Cauchy-Riemann: Interpretação geométrica



$$f(z) = \cos z$$

$$u(x, y) = x - 3xy^2$$

$$v(x, y) = y + 3x^2y - y^3$$

Teorema

Sejam $u, v : \Omega^* \to \mathbb{R}$ *funções de classe* C^1 *no conjunto aberto* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. *Então a função* $f = u + iv$ *é holomorfa em* Ω *se e só se as condições de Cauchy-Riemann forem verificadas em todos os pontos de* Ω

Exemplo: Determinar todas as funções inteiras cuja parte real é $u(x, y) = x^2 - xy - y^2$.

Exemplo: Mostrar que não existe nenhuma função inteira cuja parte real seja $u(x, y) = x^2 + y^2$.

Funções harmónicas conjugadas

Definição

Função harmónica Uma função $w : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2 no conjunto aberto Ddiz-se **harmónica** *em D se para cada ponto de D se tiver* $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

Teorema

Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$, com $f = u + iv$, uma função holomorfa em Ω, em que $u, v \in C^2(\Omega^*)$. Então u e v são funções harmónicas em Ω^*.

Definição

As funções $u, v : \Omega^* \to \mathbb{R}$ dizem-se **harmónicas conjugadas** *se forem de classe C^2 e existir uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f = u + iv$.*