1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\operatorname{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$; $\operatorname{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\operatorname{Var}(aX+bY) = a^2\operatorname{Var}(X) + b^2\operatorname{Var}(Y) + 2ab\operatorname{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X\left[E(Y \mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X{}^{(r)}(0)$

$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = \left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda > 0, x = 0,1,\cdots)$; $X \sim B(n,\theta) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n > 1, x = 0,1,\cdots,n)$

$X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\ (x < 0)$; $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2$; $(n-1)S'^2 = nS^2$

$X \sim \chi^2_{(n)} \Rightarrow E(X) = n$; $\operatorname{Var}(X) = 2n$; $X \sim N(0;\ 1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_{(1)}$; $X \sim G(n;\ \lambda) \Rightarrow 2\lambda X \sim \chi^2_{(2n)}$;

$X \sim N(0;1)\ e\ Y \sim \chi^2_{(n)} \Rightarrow X\big/\sqrt{Y/n} \sim t_{(n)}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

1. Considere uma partição $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de Ω e sejam os acontecimentos $B, C \subset \Omega$ com probabilidade positiva.

	V	F
Os acontecimentos A_1, A_2, A_3, A_4 são independentes		X
$\cup_{i=1}^4 A_i = \Omega\ e\ A_i \cup A_j = \emptyset \quad i \neq j \quad i,j = 1,2,3,4$		X
$P(B \cup C) = P(B \cup C \mid A_1)P(A_1) + P(B \cup C \mid A_2)P(A_2) + P(B \cup C \mid A_3)P(A_3) + P(B \cup C \mid A_4)P(A_4)$	X	
Admita que *B* e *C* são incompatíveis. Se $B \cup C = \Omega$ então *B* e *C* constituem uma partição de Ω.	X	

2. Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição $F(x)$, função probabilidade $f(x)$ e $a \in \Re$

	V	F
$F_X(x)$ tem tantos pontos de descontinuidade quantos os elementos do conjunto D_X	X	
Se $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ então $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$		X
A variável aleatória $Y = \varphi(X)$ não pode ser contínua ou mista	X	
$P(X = x) = 0$ para todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ que não pertençam ao conjunto D_X	X	

3. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ e $F_y(y)$ função distribuição marginal de Y.

	V	F
A probabilidade condicionada $P(X \leq x \mid Y \leq y) = F_{X,Y}(x,y)/F_Y(y)$, com $F_Y(y) > 0$	X	
Se X e Y são v.a.(s) independentes então $E(XY) = E(X).E(Y)$	X	
Se $E(XY) = 0$ e $E(X) = 0$ então X e Y não são independentes		X
Se X e Y tiverem a mesma distribuição então $F_{X,y}(x,y)$ é igual ao produto das distribuições marginais		X

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X_1 \sim N(1,1)$ e $X_2 \sim N(0,1)$ são v.a.(s) independentes então $2X_1 + X_2 \sim N(2, 5)$	X	
Seja $X \sim N(0;\sigma^2)$, então $\frac{X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$	X	
Se $X \sim B(n, \theta)$, então $Y = n - X \sim B(n - x, \theta)$.		X
Se $X \sim U(0, a)$ e $0 < a < 1$ então $\mu_e = 1/2$		X

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n,)$ $n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População X de parâmetros desconhecidos. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*

	V	F
Se $X \sim B(n, \theta)$ e $T_{(X_1, X_2, \cdots, X_n)} = \sum_{i=1}^{k} X_i$, então $T_{(X_1, X_2, \cdots, X_n,)} \sim B(kn, \theta)$	X	
$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ é uma estatística	X	
A distribuição da amostra é dada por $[P(X \le x)]^n$	X	
As estatísticas de ordem são variáveis aleatórias independentes		X

6. Seja $R_X(s) = lnM_X(s)$ onde $M_X(s)$ é a função geradora de momentos da variável aleatória X. Prove que $R'_X(0) = \mu$ e $R''_X(0) = \sigma^2$. Justifique todos os passos.[Cotação: 15]

$$R'_X(s) = \frac{d}{ds} lnM_X(s) = \frac{M'_X(s)}{M_X(s)} \Rightarrow R'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = \frac{\mu}{1} = \mu$$

$$R''_X(s) = \frac{d}{ds} R'_X(s) = \frac{M''_X(s) * M_X(s) - M'_X(s) * M'_X(s)}{M_X(s)^2} = \frac{M''_X(s) * M_X(s) - [M'_X(s)]^2}{[M_X(s)]^2}$$

$$\Rightarrow R''_X(0) = \frac{M''_X(0) * M_X(0) - [M'_X(0)]^2}{[M_X(0)]^2} = \frac{E(X^2) - \mu^2}{1} = \sigma^2$$

7. Seja, X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli. Mostre que $f_x(x) = F_X(x) - F_X(x-1)$. Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

$X \sim B(\theta) \Rightarrow f_x(x) = \begin{cases} 1-\theta & x = 0 \\ \theta & x = 1 \end{cases}$ e $F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-\theta & 0 \le x < 1, \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$ então

Para $x = 0$ tem-se $F_X(0) - F_X(0-1) = 1 - \theta - 0 = 1 - \theta$ pois $F_X(-1) = 0$

Para $x = 1$ tem-se $F_X(1) - F_X(1-1) = F_X(1) - F_X(0) = 1 - (1-\theta) = \theta$ pois $F_X(1) = 1$

Ou

$\boldsymbol{X \sim B(1, \theta)}$- é uma variável aleatória discreta pelo que $f_x(x) = F_X(x) - F_X(x-0)$ e $P(x \in (x-1, x)) = 0$

Assim, $F_X(x-0) = F_X(x-1)$ para $x \in D_X = \{0, 1\} \Rightarrow f_x(x) = F_X(x) - F_X(x-1)$

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\emptyset$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\text{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\text{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY)=a^2\text{Var}(X)+b^2\text{Var}(Y)+2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$;

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1,x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\ (x<0)$; $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\overline{X}^2$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\text{Var}(X)=2n$; $X\sim N(0;\ 1)\Rightarrow X^2\sim\chi^2_{(1)}$; $X\sim G(n;\ \lambda)\Rightarrow 2\lambda X\ \sim\chi^2_{(2n)}$;

$X\sim N(0;1)$ e $Y\sim\chi^2_{(n)}\Rightarrow X\big/\sqrt{Y/n}\sim t_{(n)}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

1. Considere uma partição $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ de Ω e sejam os acontecimentos $B,C\subset\Omega$ com probabilidade positiva.

	V	F
Os acontecimentos A_1,A_2,A_3,A_4 são incompatíveis	X	
$\cup_{i=1}^4 A_i=\Omega\ e\ A_i\cap A_j=\emptyset\quad i\neq j\quad i,j=1,2,3,4$	X	
$P(B\cup C)=P(B\cup C\|A_1)+P(B\cup C\|A_2)+P(B\cup C\|A_3)+P(B\cup C\|A_4)$		X
Admita que *B* e *C* são independentes. Se $B\cup C=\Omega$ então *B* e *C* constituem uma partição de Ω.		X

2. Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição $F(x)$, função densidade de probabilidade $f(x)$.

	V	F
Seja a v.a. $Y=1-X$ e a sua função distribuição $G(y)$. Então $G(y)=1-F_x(y)$		X
$F(x)$ é estritamente crescente		X
A variável aleatória $Y=\varphi(X)$ só pode ser contínua		X
$P(X=x)=0$ para todos os pontos $x\in\mathbb{R}$	X	

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ e $F_X(x)$função distribuição marginal de X.

	V	F
A probabilidade condicionada $P(X\leq x\|Y\leq y)=F_{X,Y}(x,y)/F_X(x)$, com $F_X(x)>0$		X
Se $E(XY)=E(X).E(Y)$então X e Y são v.a.(s) independentes		X
Se $E(XY)=0$ e $E(Y)=0$ então X e Y são independentes		X
Se X e Y tiverem a mesma distribuição e forem independentes $F_{X,Y}(x,y)=[F_X(x)]^2$	X	

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X_1 \sim N(1,1)$ e $X_2 \sim N(0,1)$ são v.a.(s) independentes então $X_1 + 2X_2 \sim N(1,3)$		X
Seja $X \sim N(2, \sigma^2)$, então $\frac{(X-2)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1)}$	X	
Se $X \sim B(n, \theta)$, então $Y = n - X \sim B(n, 1-\theta)$.	X	
Se $X \sim U(a, a+1)$ e $0 < a < 1$ então $\xi_{0.25} = a + 1/4$	X	

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População X de parâmetros desconhecidos.

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim B(n, \theta)$ e $T_{(X_1, X_2, \cdots, X_n,)} = \sum_{i=1}^{k} X_i$, então $T_{(X_1, X_2, \cdots, X_n,)} \sim B(k, \theta)$		X
$(X_1,\ X_2, \cdots, X_n)$ não é uma estatística		X
A distribuição da amostra é dada por $[f_X(x)]^n$	X	
As estatísticas de ordem são variáveis aleatórias dependentes	X	

6. Seja $R_X(s) = lnM_X(s)$ onde $M_X(s)$ é a função geradora de momentos da variável aleatória X. Prove que $R'_X(0) = \mu$ e $R''_X(0) = \sigma^2$. Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

7. Seja, X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli. Mostre que $f_x(x) = F_X(x) - F_X(x-1)$. Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

1ª Parte - Teórica – 40 minutos V3

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\mathrm{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1,x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\ (x<0)$; $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\overline{X}^2$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\mathrm{Var}(X)=2n$; $X\sim N(0;\ 1)\Rightarrow X^2\sim\chi^2_{(1)}$; $X\sim G(n;\ \lambda)\Rightarrow 2\lambda X\ \sim\chi^2_{(2n)}$;

$X\sim N(0;1)\ e\ Y\sim\chi^2_{(n)}\Rightarrow X\big/\sqrt{Y/n}\sim t_{(n)}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

1. Considere uma partição $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ de Ω e sejam os acontecimentos $B,C\subset\Omega$.

	V	F
Os acontecimentos A_1,A_2,A_3,A_4 são independentes		X
$P(A_i\|B)=P(B\|A_i)P(A_i)/\sum_{i=1}^{4}P(B\|A_i)P(A_i)\quad i=1,2,3,4$	X	
$P(B\cap C)=P(A_1)P(B\cap C\|A_1)+P(B\cap C\|A_2)P(A_2)+P(B\cap C\|A_3)P(A_3)+P(B\cap C\|A_4)P(A_4)$	X	
Admita que *B* e *C* são incompatíveis. Se $B\cup C\neq\Omega$ então *B* e *C* não constituem uma partição de Ω.	X	

2. Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição $F(x)$, função probabilidade $f(x)$.

	V	F
O domínio da função distribuição $F(x)$ é $[0;1]$		X
$F_X(x)$ tem tantos pontos de descontinuidade quantos os elementos do conjunto D_X	X	
Se $a,b\in\mathbb{R},a<b$ então $P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a-0)$	X	
A variável aleatória $Y=\varphi(X)$ não pode ser contínua ou mista	X	

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ e $F_X(x)$função distribuição marginal de X.

	V	F
A probabilidade condicionada $P(Y\leq y\|X\leq x)=F_{X,Y}(x,y)/F_Y(y)$, com $F_Y(y)>0$		X
Se $E(XY)\neq E(X).E(Y)$ então X e Y são v.a.(s) independentes		X
Se $E(XY)=0$ e $E(Y)=0$ então nada se pode concluir sobre a independência entre X e Y	X	
Se X e Y tiverem a mesma distribuição então $F_{X,Y}(x,y)=[F_X(y)]^2$		X

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X_1 \sim N(1,1)$ e $X_2 \sim N(1,2)$ são v.a.(s) independentes então $2X_1 + X_2 \sim N(3,4)$		X
Seja $X \sim N(\mu, 1)$, então $(X-\mu)^2 \sim \chi^2_{(1)}$	X	
Se $X \sim B(n,\theta)$, então $Y = n - X \sim B(n - x, 1 - \theta)$.		X
Se $X \sim U(a-1, a+1)$ e $0 < a < 1$ então $\mu_e = a$	X	

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População X de parâmetros desconhecidos.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim B(n,\theta)$ e $T_{(X_1,X_2,\cdots,X_n,)} = \sum_{i=1}^{k} X_i$, então $T_{(X_1,X_2,\cdots,X_n,)} \sim B(kn, k\theta)$		X
$(X_2, \cdots, X_{n-1})$ é uma estatística	X	
A distribuição da amostra é dada por $[F_X(x)]^n$	X	
$X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são variáveis aleatórias dependentes	X	

6. Seja $R_X(s) = ln M_X(s)$ onde $M_X(s)$ é a função geradora de momentos da variável aleatória X. Prove que $R_X'(0) = \mu$ e $R_X''(0) = \sigma^2$. Justifique todos os passos.[Cotação: 15]

7. Seja, X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli. Mostre que $f_x(x) = F_X(x) - F_X(x-1)$. Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas erradas descontam 0,5. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\emptyset$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\mathrm{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0, x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1, x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\ (x<0)$; $\bar{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\bar{X}^2$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\mathrm{Var}(X)=2n$; $X\sim N(0;\ 1)\Rightarrow X^2\sim\chi^2_{(1)}$; $X\sim G(n;\ \lambda)\Rightarrow 2\lambda X\ \sim\chi^2_{(2n)}$;

$X\sim N(0;1)\ e\ Y\sim\chi^2_{(n)}\Rightarrow X\big/\sqrt{Y/n}\sim t_{(n)}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

1. Considere uma partição $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ de Ω e sejam os acontecimentos $B,C\subset\Omega$ com probabilidade positiva.

	V	F
Os acontecimentos A_1,A_2,A_3,A_4 são incompatíveis	X	
$\cup_{i=1}^4 A_i=\Omega\ e\ A_i\cap A_j=\emptyset\quad i\neq j\quad i,j=1,2,3,4$	X	
$P(B\cap C)=P(B\cap C\mid A_1)+P(B\cap C\mid A_2)+P(B\cap C\mid A_3)+P(B\cap C\mid A_4)$		X
Admita que *B* e *C* são independentes, então *B* e *C* constituem uma partição de Ω.		X

2. Seja X uma variável aleatória mista com função de distribuição $F(x)$, função densidade $f(x)$

	V	F
O conjunto $\{x\in\mathbb{R}: P(X=x)>0\}\neq\emptyset$	X	
O domínio da função distribuição $F(x)$ é $\mathbb{R}$	X	
Se a variável aleatória $Y=\varphi(X)$ então Y é necessariamente mista		X
Existem pontos $x\in\mathbb{R}$ tais que $P(X=x)=0$	X	

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ e $F_X(x)$ função distribuição marginal de X.

	V	F
A probabilidade condicionada $P(Y\leq y\mid X\leq x)=F_{X,Y}(x,y)/F_X(x)$, com $F_X(x)>0$	X	
Se X e Y são v.a.(s) dependentes então $E(XY)\neq E(X).E(Y)$	X	
Se $E(XY)=0$ e $E(X)=0$ então X e Y são independentes		X
Se $F_{X,Y}(x,y)=[F_X(x)]^2$ então X e Y são independentes		X

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X_1 \sim N(1,1)$ e $X_2 \sim N(2,1)$ são v.a.(s) independentes então $X_1 + 2X_2 \sim N(3,5)$	X	
Seja $X \sim N(0,2)$, então $\frac{X^2}{2} \sim \chi^2_{(2)}$		X
Se $X \sim B(n,\theta)$, então $Y = n - X \sim B(n - x, \theta)$.		X
Se $X \sim U(a-1, a+1)$ e $0 < a < 1$ então $\xi_{0.25} = a - \frac{1}{4}$		X

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma População X de parâmetros desconhecidos.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim B(n,\theta)$ e $T_{(X_1,X_2,\cdots,X_n,)} = \sum_{i=1}^{k} X_i$, então $T_{(X_1,X_2,\cdots,X_n,)} \sim B(nk, n\theta)$		X
$\sum_{i=5}^{n-5} X_i$ é uma estatística	X	
A distribuição da amostra é dada por $[F_X(x)]^n$	X	
$X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são variáveis aleatórias independentes		X

6. Seja $R_X(s) = lnM_X(s)$ onde $M_X(s)$ é a função geradora de momentos da variável aleatória X. Prove que $R'_X(0) = \mu$ e $R''_X(0) = \sigma^2$. Justifique todos os passos.[Cotação: 15]

7. Seja, X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli. Mostre que $f_x(x) = F_X(x) - F_X(x-1)$. Justifique todos os passos. [Cotação: 15]

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças-1ºSem. 2013-2014 **15. 01. 14**
Exame Época Normal
2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(10)	1c.(10)	2a.(20)	3a.(10)	3c.(15)	T:
1b.(15)		2b.(20)	3b. (20)		P:

1. Num dia de greve parcial em certa empresa de transportes públicos, sabe-se que dos trabalhadores que optaram por aderir à greve, 50% tem o cônjuge empregado, 5% tem o cônjuge desempregado e o restante não tem cônjuge. Admita ainda que metade dos trabalhadores dessa empresa não tem cônjuge e que 72% destes aderiu à greve.

2.

a) Qual a percentagem de trabalhadores sem cônjuge e que aderiu à greve?

36% X 5% ☐ 24% ☐ 15% ☐

b) Determine a percentagem de adesão à greve nesta empresa.

CE – cônjuge empregado; CD – cônjuge desempregado; S – sem cônjuge;

G – greve

$$CE - cônjuge\ empregado;\ CD - cônjuge\ desempregado;\ S - sem\ cônjuge;\ G - greve$$

$P(CE|G) = 0.50,\quad P(CD|G) = 0.05,\quad P(S|G) = 1 - 0.50 - 0.05 = 0.45, P(S) = 0.5,$

$P(G|S) = 0.72$

$$P(G) = P(CE)P(G|CE) + P(CD)P(G|CD) + P(S)P(G|S)$$

$$P(G) = P(G)P(CE|G) + P(G)P(CD|G) + 0.5 \times 0.72$$

$$P(G) = 0.5P(G) + 0.05P(G) + 0.36 \Leftrightarrow 0.45P(G) = 0.36 \Leftrightarrow P(G) = \frac{0.36}{0.45} = 0.8$$

c) De um grupo de 15 trabalhadores, calcule a probabilidade de menos de 4 não terem cônjuge?

0.176 ☒ 0.0139 ☐ 0.0592 ☐ 0.0417 ☐

2. Sejam $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$, respectivamente, o montante (em dezenas €) que um vendedor gasta em gasolina durante um dia e o correspondente montante pelo qual é reembolsado. A respectiva função densidade de probabilidade conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right) \quad 10 < x < 20;\ \frac{x}{2} < y < x$$

a) Determine a função densidade de probabilidade marginal de $\boldsymbol{X}$.

$$f_X(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{1}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right) dy = \frac{1}{25}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\left(\frac{20-x}{x}\right) dy = \frac{1}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right) y]_{\frac{x}{2}}^{x}$$

$$= \frac{1}{25}\left(\frac{20-x}{x} * x - \frac{20-x}{x} * \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{25}\left(20 - x - 10 + \frac{x}{2}\right)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{25}\left(10 - \frac{x}{2}\right) \quad 10 < x < 20$$

b) Calcule o montante médio do reembolso nos dias em que o vendedor gasta 120 euros em gasolina?

$$E(Y|X=12) = \int_6^{12} y * \frac{\frac{1}{25}\left(\frac{20-12}{12}\right)}{\frac{1}{25}\left(10-\frac{12}{2}\right)} dy = \int_6^{12} y * \frac{1}{6} dy = \frac{1}{6} * \frac{y^2}{2}\Big]_6^{12} = \frac{12^2}{12} - \frac{6^2}{12} = 9$$

R: O vendedor será reembolsado num montante médio de 90 euros.

3. Uma conhecida empresa pretende lançar um novo modelo iPad no mercado. De forma a garantir a máxima fidelidade dos seus clientes pretende ser rigorosa nas especificações do modelo, pelo que realiza testes de verificação. Uma das principais características a ser analisada é a autonomia da bateria. A empresa está em condições de afirmar que esta variável tem distribuição exponencial, de média 10 horas.

a) Qual a probabilidade de a duração da bateria ser inferior à média.

0.0000 ☐ 1.0000 ☐ 0.6321 ☒ 0.3679 ☐

b) Seleccionada uma amostra casual de 10 iPads para teste, qual a probabilidade de, terem obtido uma autonomia média superior a 20 horas?

X- autonomia, em horas, de uma bateria$\sim Ex\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} X_i \sim G(10, 0.1) \Rightarrow 2\boldsymbol{\lambda}\sum_{i=1}^{10} X_i \sim \chi^2_{(20)}$

$$P(\bar{X} > 20) = P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 20 * 10\right) = P\left(2\boldsymbol{\lambda}\sum_{i=1}^{10} X_i > 2 * \frac{1}{10} * 200\right) = P\left(\chi^2_{(20)} > 40\right) = 0.005$$

c) Admitindo a amostra casual da alínea anterior, calcule a probabilidade de o iPad com menor autonomia ter durado menos de 7 horas.

$$P\left(X_{(1)} < 7\right) = 1 - [1 - F_X(7)]^{10} = 1 - (1 - 0.5034)^{10} = 0.9991$$

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças-1ºSem. 2013-2014 **15. 01. 14**

Exame Época Normal

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações					
1a.(10)	1c.(10)	2a.(20)	3a.(10)	3c.(15)	T:
1b.(15)		2b.(20)	3b. (20)		P:

1. Num dia de greve parcial em certa empresa de transportes públicos, sabe-se que dos trabalhadores que optaram por aderir à greve, 46% não tem cônjuge, 44% tem o cônjuge empregado e o restante tem cônjuge desempregado. Admita ainda que 10% dos trabalhadores dessa empresa tem cônjuge desempregado e que 50% destes aderiu à greve.

a) Qual a percentagem de trabalhadores com cônjuge empregado e que aderiu à greve?

36% ☐ 5% ☐ 24% ☐ 15% ☐

b) Determine a percentagem de adesão à greve nesta empresa.

$CE - cônjuge\ empregado;\ CD - cônjuge\ desempregado;\ S - sem\ cônjuge;$
$G - greve$

$P(CE|G) = 0.44, \quad P(CD|G) = 1 - 0.46 - 0.44 = 0.1, \quad P(S|G) = 0.46,$
$P(CD) = 0.1, \quad P(G|CD) = 0.50$

$$P(G) = P(CE)P(G|CE) + P(CD)P(G|CD) + P(S)P(G|S)$$

$$P(G) = P(G)P(CE|G) + 0.1 \times 0.5 + P(G)P(S|G)$$

$$P(G) = 0.44P(G) + 0.05 + 0.46P(G) \Leftrightarrow 0.1P(G) = 0.05 \Leftrightarrow P(G) = \frac{0.05}{0.1} = 0.5$$

c) De um grupo de 10 trabalhadores, calcule a probabilidade de menos de 4 terem cônjuge desempregado?

0.9984 ☐ 0.0112 ☐ 0.9872 ☒ 0.0574 ☐

2. Sejam $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$, respectivamente, o montante (em dezenas €) que um vendedor gasta em gasolina durante um dia e o correspondente montante do qual é reembolsado. A respectiva função densidade de probabilidade conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right) \quad 10 < x < 20;\ \frac{x}{2} < y < x$$

a) Determine a função densidade de probabilidade marginal de $\boldsymbol{X}$.

b) Calcule o montante médio do reembolso nos dias em que o vendedor gasta 120 euros em gasolina?

3. Uma conhecida empresa pretende lançar um novo modelo iPad no mercado. De forma a garantir a máxima fidelidade com os seus clientes pretende ser rigorosa nas especificações do modelo, de tal forma que realiza testes de verificação. Uma das principais características a ser analisada é a autonomia da bateria. A empresa está em condições de afirmar que esta variável tem distribuição exponencial, de média 10 horas.

a) Qual a probabilidade de a duração da bateria ser no mínimo igual à média?

1.0000 ☐ 0.6321 ☐ 0.0001 ☐ 0.3679 ☒

b) Selecionada uma amostra casual de 10 iPads para teste, qual a probabilidade de, terem tido uma duração média superior a 20 horas?

c) Admitindo a amostra casual da alínea anterior, calcule a probabilidade de o iPad com menor autonomia ter durado menos de 7 horas.

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças-1ºSem. 2013-2014 **15. 01. 14**

Exame Época Normal

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(10)	1c.(10)	2a.(20)	3a.(10)	3c.(15)	T:
1b.(15)		2b.(20)	3b. (20)		P:

1. Num dia de greve parcial em certa empresa de transportes públicos, sabe-se que dos trabalhadores que optaram por aderir à greve, 25% tem o cônjuge desempregado, 35% não tem cônjuge e o restante tem cônjuge empregado. Admita ainda que 40% dos trabalhadores dessa empresa tem cônjuge empregado e que 60% destes aderiu à greve.

a) Qual a percentagem de trabalhadores sem cônjuge e que aderiu à greve?

36% ☐ 5% ☐ 24% ☐ 15% ☐

b) Determine a percentagem de adesão à greve nesta empresa.

$CE - \text{cônjuge empregado};\ CD - \text{cônjuge desempregado};\ S - \text{sem cônjuge};$

$G - \text{greve}$

$P(CE|G) = 1 - 0.25 - 0.35 = 0.4, \qquad P(CD|G) = 0.25, \qquad P(S|G) = 0.35,$

$P(CE) = 0.4, \qquad P(G|CE) = 0.6$

$$P(G) = P(CE)P(G|CE) + P(CD)P(G|CD) + P(S)P(G|S)$$

$$P(G) = 0.4 \times 0.6 + P(G)P(CD|G) + P(G)P(S|G)$$

$$P(G) = 0.24 + 0.25P(G) + 0.35P(G) + 0.36 \Leftrightarrow 0.4P(G) = 0.24 \Leftrightarrow P(G) = \frac{0.24}{0.4} = 0.6$$

a) De um grupo de 15 trabalhadores, calcule a probabilidade de menos de 7 terem cônjuge empregado?

0.6098 ☒ 0.2066 ☐ 0.7869 ☐ 0.1771 ☐

2. Sejam $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$, respectivamente, o montante (em dezenas €) que um vendedor gasta em gasolina durante um dia e o correspondente montante do qual é reembolsado. A respectiva função densidade de probabilidade conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right) \quad 10 < x < 20;\ \frac{x}{2} < y < x$$

a) Determine a função densidade de probabilidade marginal de $\boldsymbol{X}$.

b) Calcule o montante médio do reembolso nos dias em que o vendedor gasta 120 euros em gasolina?

3. Uma conhecida empresa pretende lançar um novo modelo iPad no mercado. De forma a garantir a máxima fidelidade com os seus clientes pretende ser rigorosa nas especificações do modelo, de tal forma que realiza testes de verificação. Uma das principais características a ser analisada é a autonomia da bateria. A empresa está em condições de afirmar que esta variável tem distribuição exponencial, de média 10 horas.

a) Qual a probabilidade de a duração da bateria ser inferior a metade da média?

0.9933 ☐ 0.3935 ☒ 0.0067 ☐ 0.6065 ☐

b) Selecionada uma amostra casual de 10 iPads para teste, qual a probabilidade de, terem tido uma duração média superior a 20 horas?

c) Admitindo a amostra casual da alínea anterior, calcule a probabilidade de o iPad com menor autonomia ter durado menos de 7 horas.

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças-1ºSem. 2013-2014 — 15. 01. 14

Exame Época Normal

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações					
1a.(10)	1c.(10)	2a.(20)	3a.(10)	3c.(15)	T:
1b.(15)		2b.(20)	3b. (20)		P:

1. Num dia de greve parcial em certa empresa de transportes públicos, sabe-se que dos trabalhadores que optaram por aderir à greve, 40% tem o cônjuge empregado, 40% não tem cônjuge e o restante tem cônjuge desempregado. Admita ainda que 15% dos trabalhadores dessa empresa tem cônjuge desempregado e que todos eles aderiram à greve.

a) Qual a percentagem de trabalhadores com cônjuge desempregado e que aderiu à greve?

36% ☐ 5% ☐ 24% ☐ 15% ☒

b) Determine a percentagem de adesão à greve nesta empresa.

$P(CE|G)=0.4,\quad P(CD|G)=1-0.4-0.4=0.2,\quad P(S|G)=0.40,$

$P(CD)=0.15,\quad P(G|CD)=1$

$$P(G)=P(CE)P(G|CE)+P(CD)P(G|CD)+P(S)P(G|S)$$

$$P(G)=P(G)P(CE|G)+0.15\times 1+P(G)P(S|G)$$

$$P(G)=0.4P(G)+0.15+0.4P(G)\Leftrightarrow 0.2P(G)=0.15\Leftrightarrow P(G)=\frac{0.15}{0.2}=0.75$$

c) De um grupo de 10 trabalhadores, calcule a probabilidade de menos de 5 não terem cônjuge?

0.9901 ☐ 0.0401 ☐ 0.9986 ☐ 0.0085 ☐

2. Sejam $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$, respectivamente, o montante (em dezenas €) que um vendedor gasta em gasolina durante um dia e o correspondente montante do qual é reembolsado. A respectiva função densidade de probabilidade conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{25}\left(\frac{20-x}{x}\right) \quad 10 < x < 20;\ \frac{x}{2} < y < x$$

a) Determine a função densidade de probabilidade marginal de $\boldsymbol{X}$.

b) Calcule o montante médio do reembolso nos dias em que o vendedor gasta 120 euros em gasolina?

3. Uma conhecida empresa pretende lançar um novo modelo iPad no mercado. De forma a garantir a máxima fidelidade com os seus clientes pretende ser rigorosa nas especificações do modelo, de tal forma que realiza testes de verificação. Uma das principais características a ser analisada é a autonomia da bateria. A empresa está em condições de afirmar que esta variável tem distribuição exponencial, de média 10 horas.

a) Qual a probabilidade de a duração da bateria ser no máximo o dobro da média.

0.0000 ☐ 0.1353 ☐ 1.0000 ☐ 0.8647 ☒

b) Selecionada uma amostra casual de 10 iPads para teste, qual a probabilidade de, terem tido uma duração média superior a 20 horas?

c) Admitindo a amostra casual da alínea anterior, calcule a probabilidade de o iPad com menor autonomia ter durado menos de 7 horas.