Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2013/2014
Época Normal: 10 de Janeiro de 2014
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,5) 1. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : x\ln(x) - \ln(x) > 0\}$ e $B = \left\{\sqrt{2}\cos(n\pi) + \frac{(-1)^{n(n+1)}}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique o supremo, ínfimo, máximo e mínimo, caso existam, do conjunto B.

(c) Calcule a fronteira de B, a aderência de A e o conjunto dos pontos de acumulação de $A \cup B$.

(d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\forall \epsilon > 0,\ ]\sqrt{2} - \epsilon, \sqrt{2} + \epsilon[\cap B \neq \emptyset$ e $\exists \delta > 0 :\ ]1 - \delta, 1 + \delta[\subseteq A$;

ii. $\forall \epsilon > 0,\ ]\sqrt{2} - \epsilon, \sqrt{2} + \epsilon[\cap \mathbb{R} \backslash B \neq \emptyset$;

(4,0) 2. (a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} x \displaystyle\int_{\pi/2}^{\arctan(x)} \sin(t^2)dt$.

(b) Prove, utilizando o princípio da indução matemática, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-2)3^{k-1}}{(k+1)!} = 1 - \frac{3^n}{(n+1)!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(4,5) 3. Dado $k \in \mathbb{R}$ considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x) = \begin{cases} x\displaystyle\int_0^x te^{t^2}dt & \text{se } x < 0 \\ k & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{e^{\cos^2(x)} - e}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Determine, caso exista, um valor para $k \in \mathbb{R}$ de forma a que $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(b) Existe $k \in \mathbb{R}$ para o qual f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

(c) Prove que o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : f'(x) = 0\}$ é não vazio.

(d) Considere $k = 0$ e, sem primitivar a função te^{t^2}, indique, justificando,

i. o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\dfrac{-n}{n^2 + 3n + 1}\right)$;

ii. o valor lógico da seguinte proposição: $\forall x, y \in \mathbb{R}^- \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

(2,0) 4. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja P_k uma primitiva da função $\sin^k(x)$. Prove que, para todo o $k \in \mathbb{N}$, se tem

$$P_{k+2} = \frac{k+1}{k+2}P_k - \frac{\sin^{k+1}(x)\cos(x)}{k+2}.$$

(2,5) 5. Dado $\alpha > 0$, estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})\tan^2(x)}{(x - x^5)^\alpha}dx$$

(2,5) 6. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.

(Sugestão: para estudar o sinal de g' comece por aplicar o teorema de Lagrange à função f);