Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
ANÁLISE MATEMÁTICA 2

Exame em Época Normal 08/01/2014

Parte I

1. Mostre que a série numérica $\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt{n^{\beta}+1}-\sqrt{n^{\beta}}\right)$ é convergente se e só se $\beta > 2$.

2. Desenvolva a função $f(x) = x\log x$ em série de potências de $(x-2)$, indicando o maior intervalo (não necessariamente aberto) onde esse desenvolvimento é válido. Aproveite o resultado para determinar o valor de $f^{(12)}(2)$.

3. Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = \left(xy\sin\left(\sqrt{1/x+y}\right) \quad , \quad \dfrac{2xy}{x^4+y^2}\right)$.

(a) Represente analitica e geometricamente o domínio de f, assim como o seu interior, exterior e fronteira. Indique uma sucessão de pontos na fronteira de D_f convergente para um ponto em D_f.

(b) Calcule, ou mostre que não existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(c) Determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ ao qual f pode ser prolongada por continuidade.

4. Sejam $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ subconjuntos compactos de de $\mathbb{R}^n$. Mostre que o conjunto $A = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ é compacto.

Cotação: 2,0 + 2,0 + (1,5 + 1,5 + 1,5) + 1,5 = 10,0

Parte II

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) - y^2\text{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) & , \quad xy \neq 0 \\ 0 & , \quad xy = 0 \end{cases}$$

(a) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(0,0)$.

(b) Mostre que para qualquer vector não nulo $u = (u_1, u_2)$ se tem $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0) = u_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) + u_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) O resultado da alínea anterior permite estabelecer a diferenciabilidade de f na origem? Justifique.

2. Considere funções $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $(u,v) \mapsto F(u,v)$ e $W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $W(x,y) = xF(xy, y/x)$. Mostre que $x\dfrac{\partial W}{\partial x} + y\dfrac{\partial W}{\partial y} - W = 2x^2y\dfrac{\partial F}{\partial u}$.

3. Determine os pontos críticos da função $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$. Indique, justificadamente, se f possui extremantes locais ou globais.

4. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Determine uma função inteira $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(0) = i$ e $\text{Re}f = u$.

5. Mostre que se $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to C$ é uma função holomorfa tal que $f'(z) = 0,\ z \in \Omega$ então f é constante.

Cotação: (1,5 + 1,0 + 0,5) + 1,5 + 2,0 + 2,0 + 1,5 = 10,0