Instituto Superior de Economia e Gestão

Métodos Computacionais em Economia e Finanças

Época Normal 07/01/2013

As respostas devem ser dadas de forma clara e completa na folha de resposta. Adicionalmente, todos os cálculos e gráficos efectuados no Mathematica / Matlab devem ser entregues numa *pen* no final da prova, assinalando claramente a pergunta a que dizem respeito. Devem também ser entregues todos os programas e rotinas auxiliares que forem utilizados.

I - Equações e sistemas de equações não lineares

Considere a equação não linear $xe^{-x} - 0.2 = 0$.

(a) Mostre a equação tem exactamente duas soluções e, usando o método da bisseção, determine-as com um erro inferior a 0.5×10^{-3}.

(b) Considerando a função iteradora $g(x) = 0.2e^x$ no intervalo $[0, 1]$, mostre que a menor solução da equação pode ser determinada usando o método do ponto fixo. Através desse método, determine a solução com erro inferior a 0.5×10^{-6}. Poderá a mesma função iteradora ser usada no intervalo $[2, 3]$ para aproximar a maior solução da equação ? Em caso negativo, proponha outra função iteradora $\tilde{g}(x)$ que permita resolver o problema.

(c) Descreva o método iterativo de Newton para determinar uma aproximação da maior solução da equação em estudo. Averigue de modo experimental a validade da seguinte afirmação: *existe $x^* \in \mathbb{R}$ tal que, se a aproximação inicial x_0 for superior a x^*, o método de Newton converge para a maior raíz da equação.*

II - Métodos para sistemas lineares

Considere o sistema linear, de 4 equações a 4 incógnitas, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & \beta+8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & \beta^2+1 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Seja $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a solução do sistema $A\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$, em que $\tilde{\boldsymbol{b}} = (1.01, 0.99, 1, 1)^T$. Considerando $\beta = 2$, calcule o número de condição da matriz A na norma $\| \cdot \|_\infty$ e, sem resolver o sistema, estime a percentagem de erro cometida ao usar $\tilde{\boldsymbol{b}}$ em vez de $\boldsymbol{b}$. O que pode afirmar acerca do condicionamento deste sistema ?

(b) Ainda com $\beta = 2$, mostre que o método de Jacobi converge e utilize-o para calcular $\boldsymbol{x}$ e $\tilde{\boldsymbol{x}}$ com erro inferior a 0.5×10^{-6}.

(c) Para que valores de β é possível garantir a convergência do método de Jacobi? Será possível encontrar valores de β para os quais o método seja efectivamente divergente ? Quais ?

III - Interpolação, Aproximação e Integração

Considere o problema de calcular valores da função $g(x) = \int_x^{10} e^{-s^2}\, ds, \quad x \geq 1.$

(a) Sabendo que para $x \geq 1$ se tem $|g''(x)| \leq 1$, determine o valor de h a utilizar no método dos trapézios de modo a que o erro cometido no cálculo de $g(1)$ seja inferior a 0.5×10^{-5}.

(b) Usando o método dos trapézios para proceder ao cálculo de $g(x)$, construa uma tabela de valores aproximados da função g nos pontos $x = 1, 1.1, 1.2, 1.3$. (**Atenção:** se não resolveu a alínea anterior, utilize $h \leq 0.002$)

(c) Utilize a tabela obtida na alínea anterior para obter um polinómio, $p(x)$, que interpole g nos pontos aí considerados. Aproxime directamente $g(1.25)$ usando o método dos trapézios e compare com $p(1.25)$. Estime o erro relativo que é cometido ao aproximar $g(1.25)$ por $p(1.25)$.

Atenção: Se não tiver resolvido as alíneas anteriores, considere a tabela

x_i	1.	1.1	1.2	1.3
g_i	0.1394	0.1062	0.0795	0.0585

IV - Aplicação: Modelo de propagação de doenças

Designando por u e v, respectivamente a fração de indivíduos saudáveis e de indivíduos infectados numa dada população, relativamente a certa doença, a evolução destas variáveis pode ser modelada pelo sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} u'(t) = -\alpha\, u(t)v(t) + \lambda\, u(t)(1-u(t)) + \beta v(t) \\ v'(t) = \alpha\, u(t)v(t) - \beta\, v(t) - \mu\, v(t) \end{cases},$$

em que α é a taxa de ocorrência da doença, λ é a taxa de natalidade (neste caso igual à taxa de óbito), μ é a taxa de morte dos infectados e β é a taxa de recuperação dos infectados. Considere que no instante inicial temos $u = 0.8, v = 0.2$.

(a) Considere $a = 0.2, b = 0.1,\ \lambda = 0.02$ e $\mu \geq \lambda$. Investigue para diversos valores de μ o comportamento do sistema no longo prazo.

(b) Considere os valores dos parâmetros da alínea anterior, com $\mu = 0.04$. As autoridades de saúde estão a planear uma campanha de sensibilização para travar a propagação da doença. A campanha incide sobre a alteração de comportamento dos infectados, e as autoridades acreditam que a mesma deverá diminuir o valor do parâmetro α. Sabendo que o objectivo é obter uma fracção de infectados inferior a 1%, qual deve ser o novo valor da taxa de propagação α ?