Instituto Superior de Economia e Gestão
MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ECONOMIA E FINANÇAS

Época Normal 14/01/2014

As respostas devem ser dadas de forma clara e completa na folha de resposta. Adicionalmente, deve ser entregue no final da prova um ficheiro com todos os cálculos e gráficos efectuados no Mathematica, assinalando claramente a pergunta a que dizem respeito. Devem também ser entregues todos os programas e rotinas auxiliares que forem utilizados.

I - Equações e sistemas de equações não lineares

Considere a equação não linear $x^2 - \alpha - \cos(x + \alpha) = 0$, onde $\alpha > 2$ é um parâmetro, e da qual pretendemos determinar a solução positiva.

(a) Considere $\alpha = 3$ e aplique o método da bisseção para obter uma aproximação da solução com erro inferior a 0.5×10^{-6}.

(b) Mostre que a sucessão $x_{n+1} = \sqrt{\alpha + \cos(x_n + \alpha)}$ converge para a solução, z_α, da equação proposta, qualquer que seja $x_0 \in [1, \alpha]$. Utilize este método de ponto fixo para obter de modo independente a solução determinada na alínea (a). Como compararia o número de iterações utilizadas pelos dois métodos? Esta comparação parece-lhe consistente com as estimativas teóricas do erro para cada caso?

(c) Construa uma tabela de valores $(\alpha, z_\alpha), \alpha = 3, 4, \cdots, 100$, em que z_α é a solução da equação proposta (para cada valor de α). Obtenha a melhor aproximação de mínimos quadrados para a tabela construída, no espaço dos polinómios de grau menor ou igual a dois. Esta curva de regressão parece-lhe adequada para estimar o valor da solução do problema para valores $\alpha \in [3, 100]$? Qual é aproximadamente o erro máximo cometido?

II - Métodos para sistemas lineares

Considere as matrizes A e A^{-1} definidas por

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{-2k + k^3} \begin{pmatrix} k^2 - 1 & -k & 1 \\ -k & k^2 & -k \\ 1 & -k & k^2 - 1 \end{pmatrix}, \qquad k > 2$$

(a) Obtenha a expressão de $cond_1(A)$ e estude o condicionamento da matriz em termos dos possíveis valores do parâmetro k.

(b) Prove que o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b$, qualquer que seja o vector $b \in \mathbb{R}^3$ e qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Considere $k = 8$. Dada a aproximação inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)$, com base nas estimativas de erro para este método, quantas iterações devem ser realizadas para obter uma aproximação $x^{(k)}$ que verifique $\|x - x^{(k)}\|_1 < 0.5 \times 10^{-3}$? Apresente a solução obtida com a precisão anterior, no caso de o segundo membro do sistema linear ser $b = (1, 1, 1)$.

III - Aplicação: Competição por recursos

Uma parte importante da biologia populacional trata do competição entre diferentes espécies, ditas consumidoras, por recursos partilhados. A extensão desta área do conhecimento a problemas de economia é bastante clara. Consideremos um modelo com um consumidor (C) e dois recursos (R_1, R_2), descrito pelo sistema seguinte:

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = \left(\mu \min\left\{\dfrac{R_1}{K_1+R_1}, \dfrac{R_2}{K_2+R_2}\right\} - D_1\right) C \\[2ex] \dfrac{dR_1}{dt} = F(S_1 - R_1) - Q_1\mu \min\left\{\dfrac{R_1}{K_1+R_1}, \dfrac{R_2}{K_2+R_2}\right\} C \\[2ex] \dfrac{dR_2}{dt} = F(S_2 - R_2) - Q_2\mu \min\left\{\dfrac{R_1}{K_1+R_1}, \dfrac{R_2}{K_2+R_2}\right\} C \end{cases}$$

Símbolo	**Descrição**
Variáveis	
$C(t)$	Abundância de consumidores
$R_i(t)$	Concentração disponível do recurso i
Parâmetros	
S_i	Concentração máxima do recurso i ($S_1 = S_2 = 20$)
F	Taxa de abastecimento dos recursos
μ	Taxa máxima de crescimento populacional dos consumidores ($\mu = 0.3$)
D	Taxa de mortalidade dos consumidores ($D = 0.25$)
K_i	Parâmetro de saturação do nutriente i ($K_1 = 0.2, K_2 = 0.1$)
Q_i	Quantidade do recurso i necessária para um consumidor produzir descendência ($Q_1 = 0.1, Q_2 = 0.5$)

(a) Construa um módulo que, dada a taxa de abastecimento do recurso (F) e as condições iniciais $C(0) = 10, R_1(0) = R_2(0) = 8$, forneça uma solução numérica para o modelo proposto no horizonte temporal $t \in [0, t^*]$, com $t^* = 100$.

(b) O sistema converge para uma solução estacionária? Em caso afirmativo, qual o valor limite de cada uma das variáveis do modelo?

(c) Qual a taxa de abastecimento (F) necessária para que, até ao instante $t = t^*$, nenhum dos recursos tenha uma concentração inferior a 0.7?