

Probabilidades – Exercícios

Capítulo 1

1. Uma caixa contém 5 lâmpadas, das quais duas são defeituosas. As lâmpadas defeituosas estão numeradas de 1 a 2 e as não defeituosas estão numeradas de 3 a 5. Extraem-se 2 lâmpadas, ao acaso, uma a seguir à outra e sem reposição (com reposição).
 - a) Enumere os acontecimentos elementares do espaço de resultados associado à experiência.
 - b) Defina no espaço de resultados os acontecimentos adiante indicados:
 - A1 - "saída de uma lâmpada defeituosa na 1ª tiragem";
 - A2 - "saída de uma lâmpada defeituosa na 2ª tiragem";
 - A3 - "saída de duas lâmpadas defeituosas";
 - A4 - "saída de pelo menos uma lâmpada defeituosa";
 - A5 - "saída de exactamente uma lâmpada defeituosa";
 - A6 - "saída de uma soma de números inscritos nas lâmpadas inferior a sete".
2. Duas lâmpadas vão ser submetidas a um teste, que consiste em mantê-las ligadas até que ambas falhem. Sabe-se que nenhuma das lâmpadas dura mais de 1600 horas. Represente o espaço de resultados e os seguintes acontecimentos:
 - A - Realiza-se quando nenhuma das lâmpadas tem duração superior a 1 000 horas;
 - B - Realiza-se quando só uma das lâmpadas tem duração superior a 1 000 horas;
 - C - Realiza-se quando uma das lâmpadas dura, pelo menos, o dobro da outra;
 - D - Realiza-se quando a soma das durações das duas lâmpadas é inferior a 2 000 horas.
3. Sejam A, B e C três acontecimentos. Em função de A, B e C, exprima o acontecimento que se realiza quando:
 - a) apenas A se realiza.
 - b) A e C se realizam, mas B não.
 - c) pelo menos, um dos três se realiza.
 - d) pelo menos, dois deles se realizam.
 - e) se realizam os três.
 - f) nenhum deles se realiza.
 - g) quando muito, realiza-se um deles.
 - h) no máximo, realizam-se dois deles.
 - i) realizam-se exactamente dois deles.
 - j) no máximo, realizam-se os três.
4. Sejam A1 e A2 dois acontecimentos, tais que:
 - A1 se realiza quando um automobilista escolhido ao acaso numa bomba verifica o ar dos pneus;
 - A2 se realiza quando um automobilista escolhido ao acaso numa bomba verifica o óleo do motor.
 - a) Exprima em função deles os seguintes acontecimentos:
 - A - realiza-se quando o automobilista não verifica o ar dos pneus;
 - B - realiza-se quando o automobilista verifica o ar dos pneus ou o óleo do motor;
 - C - realiza-se quando o automobilista não verifica o ar dos pneus nem o óleo do motor;
 - D - realiza-se quando o automobilista não verifica o ar dos pneus, ou verifica o óleo do motor;
 - E - realiza-se quando o automobilista verifica o ar dos pneus e não verifica o óleo do motor;
 - F - realiza-se quando o automobilista verifica o óleo do motor e não verifica o ar dos pneus;
 - G - realiza-se quando o automobilista verifica um e um só dos equipamentos.
 - b) Os acontecimentos E e F são ou não incompatíveis?
 - c) Exprima G em função de E e F.
 - d) A realização de A implica a realização de F, ou o contrário?
5. Numa cidade são publicados três semanários, S1, S2 e S3. Sabe-se que:
 - 22% dos habitantes lêem S1;
 - 15% dos habitantes lêem S2;
 - 13% dos habitantes lêem S3;
 - 8% dos habitantes lêem S1 e S2;
 - 5% dos habitantes lêem S1 e S3;

4% dos habitantes lêem S2 e S3;
 2% dos habitantes lêem os três semanários.
 Calcule a probabilidade de um habitante da cidade, escolhido ao acaso:

- Ler pelo menos um semanário.
 - Ler um e um só semanário.
 - Não ler nenhum dos semanários.
6. Os trabalhadores de uma empresa utilizam diversos meios de transporte, na sua deslocação de casa para o emprego: 57% utilizam o autocarro; 45% o metropolitano; 32% o comboio; 15% o autocarro e o metropolitano; 17% o autocarro e o comboio; 15% o comboio e o metropolitano; 5% utilizam os três meios de transporte.
- Qual a percentagem de trabalhadores que não utilizam nenhum daqueles meios de transporte?
 - Qual a percentagem de trabalhadores que utilizam pelo menos dois daqueles meios de transporte?
7. Fazem-se 3 lançamentos de um dado equilibrado. O acontecimento A_1 realiza-se quando o resultado do primeiro lançamento é 1 ou 2; o acontecimento A_2 realiza-se quando o resultado do segundo lançamento é 3 ou 4; o acontecimento A_3 realiza-se quando o resultado do terceiro lançamento é 5 ou 6.
- Calcule $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.
 - Mostre que $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - (1 - 1/3)^3$.
8. Para cada n inteiro positivo, seja $P(\{n\}) = (1/2)^n$. Considere os acontecimentos $A = \{n : 1 \leq n \leq 10\}$, $B = \{n : 1 \leq n \leq 20\}$, $C = \{n : 11 \leq n \leq 20\}$.
 Calcule $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(C)$ e $P(\bar{B})$.
9. Escolhendo um ponto ao acaso, divide-se um segmento em dois. Qual a probabilidade de que o maior dos segmentos resultantes tenha, pelo menos, o dobro do comprimento do outro?
10. Sejam A e B dois acontecimentos definidos num mesmo espaço de resultados. Mostre que:
- $$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$
11. Um semicírculo tem como base o intervalo $] -r, r[$. Escolhendo um ponto ao acaso neste intervalo, qual a probabilidade do segmento perpendicular ao intervalo, com extremos nesse ponto e no semicírculo, ter comprimento inferior a $r/2$?
12. Para qualquer sucessão de acontecimentos A_1, A_2, \dots, A_n , defina uma nova sucessão, B_1, B_2, \dots, B_n , de acontecimentos mutuamente exclusivos, tais que $\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n B_i$.
13. Numa turma com 30 alunos, 20 são rapazes. Pretende-se escolher quatro alunos para formar uma comissão representativa da turma.
- Qual a probabilidade de que na comissão haja dois rapazes e duas raparigas?
 - Qual a probabilidade de o 3º aluno escolhido ser rapaz?
14. Num teste de respostas múltiplas (4 alternativas), com vinte questões, escreva uma expressão para a probabilidade de uma pessoa obter classificação igual ou superior a 7 valores, se responder ao acaso e as perguntas forem cotadas igualmente em 1 valor?
15. Da produção diária de uma máquina retiram-se, sucessivamente, ao acaso e com reposição, 10 dos artigos produzidos, para efeitos de controlo de qualidade. Sabe-se que 80% dos artigos produzidos pela máquina não apresentam defeito. Qual a probabilidade de haver menos de 3 artigos defeituosos, nos 10 artigos controlados?
16. Numa fábrica são utilizadas três máquinas para a produção de um mesmo produto, nas seguintes percentagens: Máquina 1: 40%; Máquina 2: 35%; Máquina 3: 25%. As

percentagens de artigos defeituosos produzidos por cada máquina são, respectivamente, 4%, 2% e 1%.

Em certo momento retirou-se um artigo da produção total.

- a) Qual a probabilidade de ser não defeituoso?
- b) Observando-se que é defeituoso, qual a probabilidade de ter sido produzido pela Máquina 1?
17. Os trabalhadores de uma dada empresa foram classificados em três níveis: com formação mínima, com formação média e com formação superior. Sabe-se que 55% desses trabalhadores têm salário superior a 1000 Euros. Sabe-se também que:
- 40% dos trabalhadores com formação média têm salário superior a 1 000 Euros;
 - 70% dos trabalhadores com formação superior têm salário superior a 1 000 Euros;
 - Nenhum dos trabalhadores com formação mínima tem salário superior a 1 000 Euros;
 - 10% dos trabalhadores têm formação mínima.
- a) Calcule a probabilidade de um trabalhador, escolhido ao acaso nessa empresa, ter formação média.
- b) Calcule a probabilidade de ter formação superior, sabendo que ganha mais de 1000 Euros.
18. Determinado teste é usado no diagnóstico de uma deficiência, mas o resultado nem sempre é correcto: aplicado a uma pessoa doente, dá resultado positivo em 98% dos casos; aplicado a uma pessoa saudável, dá resultado positivo em 10% das vezes.
- a) Qual a probabilidade de uma pessoa doente ter um resultado negativo?
- b) Qual a percentagem de testes positivos se, no conjunto das pessoas que o fazem, 10% estiverem efectivamente doentes?
19. Para se destruírem os produtos deteriorados, analisa-se periodicamente certa produção. No processo, que não é infalível, 10% dos artigos não deteriorados são destruídos e 5% dos produtos deteriorados não são destruídos, destruindo-se na totalidade 27% da produção.
- a) Qual a percentagem de artigos deteriorados e destruídos?
- b) Qual a percentagem da produção em boas condições?
- c) Qual a percentagem de artigos deteriorados e não destruídos?
20. Numa fábrica trabalham 30 mulheres e 50 homens. A distribuição dos trabalhadores por classes de idades é a seguinte:

	H	M
até 21 anos	5	3
de 21 a 50 anos	30	18
mais de 50 anos	15	9

Escolhe-se uma pessoa ao acaso.

- a) Qual a probabilidade de a pessoa escolhida ser homem, sabendo-se que tem mais de 50 anos?
- b) Os acontecimentos A: "a pessoa escolhida é homem" e B: "a pessoa escolhida tem mais de 50 anos" são independentes? Justifique.
21. Em certa unidade industrial constatou-se que o não cumprimento dos planos de produção ficava a dever-se à ocorrência de avarias no equipamento, entre outras causas. Assim, verificou-se que:
- Em 80% dos meses não se registou qualquer avaria e, apesar disso, não foi possível cumprir o plano de produção em 10% das vezes;
 - Só em 70% dos meses em que se verificou uma avaria foi possível cumprir o plano estabelecido.
 - Em 5% dos meses ocorreram duas ou mais avarias, e apenas em 40% das vezes se cumpriu o plano;
- a) Qual a percentagem de meses em que há avarias e se cumpre o plano de produção?
- b) Nos meses em que se cumpre o plano de produção, qual a probabilidade de ocorrer uma avaria?
- c) Calcule a probabilidade de num trimestre haver um mês em que o plano de produção não seja cumprido.

22. A produção de uma fábrica de cimento é ensacada por três máquinas, de acordo com as seguintes percentagens: M1 – 50%; M2 – 25%; M3 – 25%. Cada saco é vendido como contendo 50 kg, mas o peso real pode não coincidir com o referido na embalagem, em consequência do estado de desafinação das máquinas.
Da experiência passada sabe-se que as percentagens de sacos cujo desvio entre o peso real e o peso indicado é superior a 2 kg são, respectivamente, as seguintes: M1 – 5%; M2 – 6%; M3 – 4%.
Em dado momento pesou-se um saco e verificou-se ter menos de 48 kg de cimento. Qual a probabilidade de ter sido ensacado pela máquina M1?
23. Certa empresa utiliza três meios de transporte nas deslocações dos seus empregados de Lisboa ao Porto: automóvel, comboio e avião. Verificou-se que 50% das deslocações são feitas por automóvel e 20% por avião. Relativamente às deslocações por comboio, sabe-se que as efectuadas na segunda-feira são em número igual às de terça-feira e as efectuadas na quarta-feira são em número igual às de quinta-feira e metade das realizadas na segunda-feira. À sexta-feira não se efectuam deslocações por comboio. Quanto às deslocações por avião, constatou-se que se realizaram apenas à quinta-feira e à sexta-feira, em igual número. As deslocações por automóvel distribuíram-se igualmente pelos cinco dias.
- Determine a percentagem de viagens realizadas à quinta-feira.
 - Das viagens realizadas à quinta-feira, calcule a percentagem delas em que foi utilizado o automóvel.
24. Num estudo sobre “novos hábitos” dos alunos observa-se que 10% acham normal tomar o pequeno-almoço na aula, enquanto outros 30% pensam que é a aula a melhor altura para se pôr a conversa em dia. Por outro lado, 90% destes últimos nunca têm dúvidas sobre a matéria leccionada, enquanto 30% dos que tomam o pequeno-almoço na aula e 30% dos que ainda conservam alguns resquícios de civilidade apresentam ocasionalmente dúvidas.
- Foi posta uma dúvida sobre a matéria. Calcule a probabilidade de o aluno estar a tomar o pequeno-almoço.
 - Pode afirmar-se que mais de 80% dos alunos não apresentam dúvidas na aula?
25. No turno da tarde existem apenas três turmas em determinada disciplina: a Turma A, com 25 alunos (10 rapazes); a turma B, com 20 alunos (15 rapazes); a turma C, com 26 alunos (13 rapazes).
- Um dos alunos em questão é seleccionado ao acaso. Sendo rapaz, qual a probabilidade de pertencer à turma C?
 - Formou-se uma comissão com dois alunos. Sabendo que foram sorteados um rapaz e uma rapariga da mesma turma, calcule as probabilidades de serem de cada uma das três turmas.
26. A gestão das carteiras de acções numa dada praça financeira é feita unicamente por três corretoras, C1, C2 e C3. A primeira detém dois terços do mercado e as outras duas têm quotas iguais. Dos resultados de anos passados sabe-se que as probabilidades das corretoras conseguirem uma valorização anual das carteiras dos seus clientes superior a 10% são, respectivamente, 0.75, 0.45 e 0.40.
Sabe-se que a carteira de certo indivíduo registou uma valorização superior a 10%. Qual a probabilidade de ser um cliente de C1?
27. Na produção de certo tipo de peças constata-se que 3% são defeituosas. O controlo de qualidade instalado permite detectar 95% das peças defeituosas, embora também classifique como tal 4% das peças sem defeito.
- Qual a percentagem de peças rejeitadas no controlo de qualidade?
 - “A maior parte das peças rejeitadas não têm defeito.” Comente.
28. Um estudo sobre tabagismo numa grande multinacional conduziu aos seguintes resultados: um quarto dos trabalhadores com menos de 30 anos são fumadores, tal como metade dos trabalhadores entre 30 e 50 anos e metade dos trabalhadores com 50 ou mais anos. Os trabalhadores com menos de 30 anos constituem 50% do pessoal da empresa.
- Escolhido um trabalhador ao acaso, qual a probabilidade de ser fumador?

- b) Qual a probabilidade de um trabalhador escolhido ao acaso ter idade inferior a 30 anos, sabendo-se que é fumador? Face a este resultado, que pode dizer sobre a relação entre a idade e o consumo de tabaco na população estudada?
29. Os clientes da “Cybersmart” na região de Lisboa são servidos por três centrais: alfa1, alfa2 e alfa3. Consta-se que alfa2 e alfa3 servem o mesmo número de clientes, enquanto alfa1 serve o dobro daquelas. Por outro lado, tomou-se conhecimento de que 2% das ligações de alfa1 e 4% das ligações de alfa2 registaram falhas, enquanto que 94% das ligações de alfa3 não registaram qualquer problema. A empresa garante aos clientes que as suas ligações têm uma fiabilidade de 95%.
- a) Concorda com a taxa de fiabilidade apresentada pela empresa?
- b) Um cliente acaba de informar a empresa que a sua ligação falhou. Qual a central que, com maior probabilidade, estaria a utilizar?
30. Numa experiência de aprendizagem um indivíduo realiza duas vezes seguidas uma determinada tarefa, podendo falhar ou ser bem sucedido em cada uma delas. A probabilidade de falhar a primeira tentativa é de 0.25. Se falhar a primeira, a probabilidade de ser bem sucedido na segunda é de 0.5. Se for bem sucedido na primeira, a probabilidade de falhar na segunda é de 0.1.
Qual a probabilidade de falhar a segunda tentativa?
31. No trajecto de um avião de guerra há duas estações de radar inimigas equipadas com baterias antiaéreas, que só são accionadas se o avião for detectado. O avião tem uma probabilidade de 0.25 de ser detectado pela primeira estação e, sendo detectado, tem três hipóteses em cinco de não ser abatido por essa estação. Se o avião não é detectado pela primeira estação, aproxima-se da segunda nas mesmas condições em que da primeira. Por outro lado, se a primeira estação o detecta sem o abater, será certamente detectado e abatido pela segunda estação.
- a) Qual a probabilidade de o avião não ser abatido pela primeira estação?
- b) Qual a probabilidade de o avião não ser abatido?
- c) O avião foi abatido. Qual a probabilidade de ter sido a primeira estação a abatê-lo?
32. Considere dois acontecimentos, A e B . Mostre que, se $P(B|A) = P(B|\bar{A})$, então A e B são independentes.
33. Numa turma com 30 alunos (20 raparigas e 10 rapazes), 5% dos rapazes e 6% das raparigas têm classificações superiores a 14 valores.
- a) Selecciona-se um aluno ao acaso e verifica-se que tem classificação superior a 14. Qual a probabilidade de ser rapaz?
- b) Considere os acontecimentos "ser aluno com classificação superior a 14" e "ser rapaz". Qual a probabilidade da realização simultânea daqueles dois acontecimentos, se forem agora considerados independentes.
34. Seja (Ω, \mathcal{A}, P) um espaço de probabilidades e considerem-se $A, B, C \in \mathcal{A}$, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. Se B e C são independentes, demonstre que,

$$P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C) + P(A|B \cap \bar{C})P(\bar{C}).$$

Capítulo 2

35. Uma caixa contém 5 bolas pretas, 3 azuis e 7 vermelhas. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar 2 bolas da caixa, ao acaso, sucessivamente e sem reposição. Sabendo que está estabelecida a pontuação: bola preta, 1 ponto; bola azul, 2 pontos; bola vermelha, 3 pontos, caracterize uma variável aleatória X que represente a pontuação obtida.
- Qual o acontecimento que é a imagem inversa de $\{3,5\}$?
 - Determine a função de distribuição de X .
 - Calcule $P(X > 3 | X < 6)$.

36. O número de automóveis encomendados mensalmente num stand é uma v.a. X com a seguinte função de probabilidade:

$x:$	0	1	2	3	4
$f(x):$	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1

- Escreva a função de distribuição de X .
 - Quantos automóveis deve o stand ter num mês, para que a probabilidade de satisfazer todas as encomendas não seja inferior a 0.75?
 - Num mês em que há três automóveis em stock no stand, qual a distribuição da variável aleatória que representa a diferença, em valor absoluto, entre a procura e o stock?
37. Numa loja da especialidade a procura diária de rádios para automóvel é uma variável aleatória, X , com função de probabilidade:

$x:$	0	1	2	3	4
$f(x):$	0.2	p_1	p_2	0.2	0.1

Sabe-se ainda que são procurados 2 rádios, em metade dos dias em que a procura é superior a 1.

- Calcule p_1 e p_2 , justificando.
 - No início de certo dia existem apenas 2 rádios do modelo referido. Calcule a probabilidade de serem vendidos (admita que a procura coincide com a venda sempre que existe o produto procurado).
 - Em relação à alínea b) obtenha a distribuição da variável “número de rádios vendidos”.
38. Um teste é composto por 20 questões, cada uma das quais com 4 respostas alternativas (apenas uma delas é correcta). Cada resposta certa vale 1 valor.
- Respondendo ao acaso às questões, encontre a distribuição da variável aleatória que representa a classificação obtida no teste e calcule a probabilidade de aprovação (classificação igual ou superior a 10 valores).
 - “Se cada questão tivesse apenas duas alternativas, continuando os alunos a responder completamente ao acaso, então seriam aprovados quase 60%”. Comente.

39. Seja X uma v.a. com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & 0 < x < 2 \\ 1 - \frac{x}{4} & 2 < x < 4 \end{cases}$$

- Obtenha a função de distribuição de X .
- Determine a densidade de $Y = 8 - 2X$.
- Supondo que X representa a procura mensal (em toneladas) de certo artigo, determine o stock mínimo a constituir no início de cada mês, de modo que a probabilidade de ruptura seja igual a 5%.

40. Seja X uma variável aleatória com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1/2, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

- a) Calcule a função de distribuição.
 b) Calcule a função de densidade das variáveis aleatórias:

$$i) Y = 4X - 2 \quad ii) W = (X + 1)^2 \quad iii) Z = 2 - X \cdot$$

- c) Calcule a função de distribuição da variável aleatória seguinte e classifique-a:

$$U = \begin{cases} -1, & X < 0.5 \\ 0, & 0.5 < X < 1.5 \\ 1 & X > 1.5 \end{cases}$$

41. Admita que o tempo de permanência dos alunos numa aula de 2 horas é uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade $f(x) = 1 - x/2$, $0 < x < 2$.

- a) Qual a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, assistir a mais de 75% da aula?
 b) De 10 alunos, escolhidos ao acaso no conjunto dos que estão presentes no início da aula, qual a probabilidade de apenas 1 permanecer na sala quando faltarem 15 m para a aula terminar?

42. Seja X uma variável aleatória com f.d.p. $f(x) = kx^2$, $-1 < x < 1$.

- a) Mostre que $k = 1.5$.
 b) Sabendo que X é positiva, e utilizando a função de distribuição, calcule a probabilidade de ser X maior que 0.5.
 c) Obtenha a função de distribuição da variável aleatória Y que concentra os valores negativos de X no ponto 0 e mantém sem alteração os positivos.
 d) Se $Z = \frac{|X^3 + 1|}{2}$, verifique que a respectiva f.d.p. é $f(z) = 1$, $0 < z < 1$.

43. Um cliente de uma livraria que deseje comprar livros estrangeiros inexistentes em stock faz a respectiva encomenda ao balcão. O número de encomendas semanais feitas nestas condições, para livros em Inglês e Francês, é um vector aleatório (X, Y) com a seguinte distribuição conjunta:

$Y \backslash X$	0	1	2	3
.01	.02	.04		.03
.05	.10	.20		.15
.04	.08	.16		.12

- a) Qual a probabilidade de numa semana serem encomendados, no máximo, 2 livros em Inglês e 1 livro em Francês?
 b) Qual a percentagem de semanas em que existe igual número de pedidos de livros em Inglês e em Francês?
 c) Determine as distribuições marginais e diga qual o seu significado.
 d) Qual a distribuição da variável aleatória “número de livros encomendados nas duas línguas”?

44. Uma máquina produz determinado tipo de componentes electrónicos. Esses componentes podem ter um, e um só, de dois tipos de defeitos (A ou B), com probabilidades 0.07 e 0.03, respectivamente. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso, e com reposição, dois componentes da produção da máquina. Considere as seguintes variáveis aleatórias:

X : v.a. que representa o número de defeitos do tipo A encontrados nos dois componentes;

Y : v.a. que representa o número de defeitos do tipo B encontrados nos dois componentes.

- a) Construa a função de probabilidade conjunta de (X, Y) .
 b) Determine as distribuições marginais e analise a independência das variáveis.
 c) Calcule a probabilidade de se encontrar no conjunto dos dois componentes um defeito do tipo B, sabendo que nenhum dos componentes apresenta defeito do tipo A.
 d) Encontre a distribuição do número total de defeitos encontrados nos dois componentes.

45. Considere uma caixa com 10 bolas, 5 das quais são pretas. Uma experiência aleatória consiste em lançar um dado perfeito e extrair da caixa, sem reposição, um número de bolas igual à pontuação obtida no lançamento do dado. Qual a probabilidade de todas as bolas extraídas serem pretas?

46. Sabe-se que a intensidade sonora do ruído ambiente em duas ruas, A e B, é um vector aleatório (X, Y) , cujo comportamento pode ser descrito pela densidade conjunta

$$f(x, y) = kx^2(1 - y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

- Calcule k .
- Investigue a independência das variáveis.

47. Uma empresa dedica-se ao comércio de diversos artigos, cujas vendas têm comportamentos aleatórios. As vendas mensais do artigo A e do artigo B, expressas em dada unidade monetária, constituem o vector aleatório (X, Y) , cuja f.d.p. conjunta é

$$f(x, y) = 1/k, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < x.$$

- Determine a constante k . Estude a independência entre as variáveis.
- Determine a percentagem de meses em que as vendas totais dos artigos A e B são superiores a 1 unidade monetária.
- Determine a percentagem de meses em que tanto as vendas do artigo A como as do artigo B são superiores a 1 unidade monetária.
- Determine a percentagem de meses em que as vendas do artigo A são superiores a 1 unidade monetária.
- Determine a f.d.p. das vendas do artigo B condicionadas pelas vendas do artigo A.
- Determine a f.d.p. das vendas do artigo A condicionadas pelas vendas do artigo B e calcule $P(0.5 < X < 1 | Y = 0.75)$.

48. Considere duas variáveis aleatórias com a seguinte f.d.p. conjunta:

$$f(x, y) = k(1 - x - y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 - x.$$

- Determine a constante k .
- Calcule as funções de densidade marginais e discuta a independência das v.a.
- Calcule $P(X + Y < 0.5)$
- Determine as distribuições condicionadas.

49. Considere que o rendimento mensal (em milhares de Euros) dos casais sem filhos, que vivem em determinada região, é uma v.a. bidimensional (X, Y) , sendo X o rendimento da mulher e Y o rendimento do marido. Considere ainda a função $f(x, y) = 1/a$, $0 < x < b$, $x < y < b$.

- Encontre a relação existente entre a e b que faz da função acima uma f.d.p. conjunta.
- Admita que $a = 8$ e $b = 4$. Encontre a distribuição do rendimento mensal do marido.
- Determine a probabilidade do rendimento mensal de um casal ultrapassar os 5 000 Euros.

50. Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional, em que X representa a quantidade semanal (tons.) vendida do produto A e Y representa a quantidade semanal (tons.) vendida do produto B. A f.d.p. conjunta é

$$f(x, y) = e^{-(x+y)}, \quad x > 0, y > 0.$$

- Calcule a percentagem de semanas em que as vendas do produto A são superiores às vendas do produto B.
- Obtenha a função de densidade das vendas do produto A, condicionadas pelas vendas do produto B. Que pode concluir sobre a independência entre as duas variáveis?

51. Sendo (X_1, X_2) um par aleatório, tal que $f(x_1, x_2) = 1$, $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$, determine a f.d.p da v.a. $Y_1 = X_1 \times X_2$.

52. Uma pessoa toma diariamente um comboio que parte entre as 7:25 e as 7:30. A v.a. que representa o período de tempo (em minutos) que decorre entre as 7:25 e o momento da partida tem f.d.p.

$$f(x) = \frac{2}{25}(5 - x), \quad 0 < x < 5.$$

A hora de chegada da pessoa à estação é também aleatória, entre as 7:25 e as 7:30, e não há razões para se supor que certos momentos tenham maior densidade de probabilidade do que os outros.

Admitindo independência entre as duas v.a., determine:

- a) a f.d.p e a f.d. conjuntas das duas v.a..
- b) a probabilidade de a pessoa apanhar o comboio, usando a distribuição conjunta.
- c) a probabilidade de a pessoa apanhar o comboio, fazendo a conveniente mudança de variáveis.
- d) a probabilidade de a pessoa ter que esperar mais de 2 minutos até à partida do comboio, também por um e outro dos dois processos.

53. Seja X o tempo de espera de um cliente, até ser atendido aos balcões do Banco A, e seja Y o tempo de espera de um cliente, até ser atendido aos balcões do Banco B (o tempo medido em certa unidade). A distribuição conjunta de X e Y é dada por $f(x, y) = 4ye^{-(x+2y)}$, $x > 0$, $y > 0$.

Calcule a distribuição de $U=X-Y$ e, a partir dela, estude se se deve acreditar que os clientes do Banco A demoram mais tempo a ser atendidos do que os do Banco B.

54. O vector aleatório (X, Y) tem f.d.p. conjunta $f(x, y) = 4xy$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

- a) Calcule a função de distribuição conjunta das duas variáveis.
- b) Calcule a função de densidade de probabilidade conjunta de $U = X^2$ e $V = Y^2$.
- c) Calcule a f.d.p. da média aritmética entre X e Y .

Capítulo 3

55. Uma variável X tem função de probabilidade

$x:$	0	1	2	3	4
$f(x):$	0.2	0.2	0.1	0.3	0.2

- a) Calcule $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.
- b) Sendo $Y = |X - 2|$, determine $E(Y)$ e $\text{Var}(Y)$.
- c) Faça $Z = 1/(X + 1)$ e calcule $E(Z)$ e $\text{Var}(Z)$.

56. Retome o exercício 40.

- a) Calcule $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.
- b) Calcule $E(1/X)$.
- c) Calcule $E(Y)$, $E(W)$, $E(Z)$ e $E(U)$.

57. Um comerciante vende, entre outros artigos, máquinas de calcular de certo tipo. Seja X a v.a. que representa o número de máquinas de calcular disponíveis para venda no início de cada semana. O comerciante possui uma dessas máquinas para seu próprio uso, que poderá eventualmente vender, mas que não conta como disponível. O número de máquinas vendidas semanalmente é uma v.a. Y . A função de probabilidade conjunta de (X, Y) é

$$f(x, y) = 1/12, \quad x = 1, 2, 3; \quad 0 \leq y \leq x + 1, \quad y \text{ inteiro.}$$

- a) Determine a percentagem de semanas em que se vendem mais máquinas do que a média das máquinas disponíveis.
- b) Determine a percentagem de semanas em que o comerciante tem que vender a sua própria máquina.
- c) Determine a percentagem de semanas em que uma das máquinas disponíveis fica por vender.

58. Considere o vector aleatório (X, Y) , com função de probabilidade conjunta

Y/X	-1	0	1
-1	b	0	c
0	0	a	0
1	c	0	b

- a) Obtenha as relações entre a , b e c : (i) de forma que X e Y sejam não correlacionadas; (ii) de forma que X e Y sejam perfeitamente correlacionadas.
- b) Obtenha a f.p. da v.a. $W = |X - Y|$.

59. Uma empresa dedica-se à venda de fechaduras. O preço de compra das fechaduras é uma v.a. Y com função de densidade dada por $f(y) = 0.5y$, $0 < y < 2$. O preço de venda das mesmas fechaduras é uma v.a. X , tal que $f(x|y) = 0.25x$, $1 < x < 3$, y fixo no intervalo $]0, 2[$.

- a) Calcule a probabilidade da comercialização de uma fechadura ser lucrativa.
- b) Estude a existência de independência entre as variáveis aleatórias e conclua sobre o valor do coeficiente de correlação.
- c) Calcule a expressão analítica da curva de regressão (tipo I) de X sobre Y e comente, face aos resultados de b).

60. Considere duas variáveis aleatórias, X e Y , com f.d.p. conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < 1; 0 < y < x \\ 0, & \text{outros } (x, y) \end{cases}.$$

- a) Estude a independência entre X e Y .
- b) Calcule $P(X > 2Y)$.
- c) Obtenha a regressão de tipo I de Y sobre X .

61. Num estabelecimento são vendidos os produtos A e B. A experiência anterior na venda desses produtos permite estabelecer que:
- Nunca se vende mais do que uma unidade de cada um dos produtos;
 - Em 50% dos dias vende-se uma unidade do produto A;
 - Em 40% dos dias não se vende qualquer unidade do produto B;
 - Nos dias em que não se vende qualquer unidade de A, vendem-se em média 0.8 unidades de B.
- a) Obtenha as funções de probabilidade marginais das variáveis aleatórias que representam as vendas diárias dos dois produtos, bem como as respectivas funções de distribuição.
 - b) Obtenha a f.p. conjunta das variáveis.
 - c) Calcule e interprete o coeficiente de correlação.
 - d) Calcule o número médio de unidades vendidas do produto A, nos dias em que é vendida 1 unidade do produto B.
62. Considere o vector aleatório (X, Y) , onde X representa o tempo de permanência de um aluno na aula e Y representa o aproveitamento que ele retira da mesma (tempo em que está atento), com a f.d.p. $f(x, y) = k$, $0 < x < 1$, $0 < y < 0.8x$.
- a) Mostre que $k = 2.5$.
 - b) Qual a probabilidade de o aluno estar atento a maior parte do tempo que está na aula?
 - c) Obtenha o valor esperado de Y condicionado por X e interprete o resultado quanto ao grau de aproveitamento das aulas.
63. A procura diária de um produto, em toneladas, é uma variável aleatória X com função de densidade $f(x) = 1/4$, $0 < x < 4$.
- a) Sabendo que o lucro por cada tonelada vendida é de 4 unidades monetárias e o prejuízo por cada tonelada não vendida é de 2 u. m., calcule a tonelagem a comprar no início de cada dia.
 - b) Resolva a questão da alínea anterior, admitindo adicionalmente que a empresa considera um custo de 1 u.m. por tonelada de procura não satisfeita (custo de penúria). Analise os resultados.
64. A procura semanal (em toneladas) de certo produto, num dado entreposto comercial, é uma variável aleatória com f.d.p. $f(x) = 0.25 - 0.01x$, $10 \leq x \leq 20$.
- No início de cada semana é expedida a partir da fábrica a quantidade necessária para abastecer o entreposto, não sendo possíveis quaisquer abastecimentos intercalares. Sabendo que cada tonelada vendida no entreposto proporciona um lucro de 500 Euros e cada tonelada não vendida implica um custo de armazenamento semanal de 100 Euros, determine:
- a) A quantidade ótima a expedir no início de cada semana.
 - b) A probabilidade de ruptura do stock ótimo.
65. Retome as distribuições dos exercícios 55 e 40 e, para cada uma delas, calcule o coeficiente de variação, o coeficiente de assimetria, o coeficiente de achatamento, o erro médio absoluto, a amplitude inter-quartis, a mediana e $\xi_{0.356}$. Caracterize as distribuições, recorrendo aos valores obtidos para os referidos parâmetros.
66. Dada a f.p. conjunta $f(x, y) = \frac{x+y}{32}$, $x = 1, 2$; $y = 1, 2, 3, 4$:
- a) Calcule $E[X]$ e $\text{Var}(Y)$.
 - b) Use valores esperados para verificar que X e Y não são independentes.
 - c) Calcule o coeficiente de correlação entre as duas variáveis.
67. Uma empresa vende em média, por mês, 50 unidades de determinado produto, com desvio padrão igual a 3. Obtenha um limite mínimo para a probabilidade de as vendas mensais se situarem entre 40 e 60 unidades.
68. Uma sapataria vende, em média, 120 pares de sapatos por semana.
- a) Calcule um limite superior para a probabilidade de, numa semana, se venderem pelo menos 240 pares de sapatos.

- b) Sabendo que a variância do número de pares de sapatos vendidos é 100, forneça um limite inferior para a probabilidade de, numa semana, se venderem entre 40 e 200 pares.
69. Em certa região, o rendimento individual tem distribuição desconhecida. O rendimento médio, no entanto, é conhecido e igual a 20 000 u.m., registando-se ainda um desvio padrão de 2 500 u.m. Crê que será admissível haver 70% de habitantes da região com rendimento entre 12 500 e 27 500 u.m.?
70. O número de acidentados que diariamente requerem tratamento de urgência em determinado hospital é uma v.a. com média 30 e variância 4. Para efeitos de dimensionamento do serviço de urgência, quer calcular-se um limite diário para o número de acidentados que não seja excedido em, pelo menos, 95% dos dias. Calcule esse limite.
71. De uma v.a. Y sabe-se que $E[Y]=100$ e $\text{Var}[Y]=9$. Calcule um minorante para $P[80 \leq Y \leq 130]$:
- Usando a desigualdade de Chebychev e um intervalo centrado na média, escolhido de forma conveniente.
 - Usando a desigualdade de Chebychev, aplicada ao intervalo dado. Compare com o resultado obtido em a) e comente.
 - Usando a desigualdade de Chebychev, mas sabendo que Y tem distribuição simétrica em torno da sua média.

Capítulo 4

72. Num certo jogo é sorteado um número entre 000 e 999, inclusive. O prémio (€) é igual ao quántuplo do número sorteado. Seja X a v.a. que representa o número premiado e Y a v.a. que representa o valor do prémio correspondente. Calcule:
- A f.p., o valor esperado e a variância de X .
 - A f.p., o valor esperado e a variância de Y .
 - Quanto deve pagar uma pessoa para participar no jogo, se este for um “jogo justo”?
73. Sejam a e b números inteiros, tais que $a < b$. Seja Y uma v.a. com distribuição uniforme no conjunto $\{a, a + 1, \dots, b\}$. Calcule a f.p., o valor esperado e a variância de Y .
74. A procura diária de um produto, em unidades, é uma variável aleatória X com distribuição uniforme no conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- Sabendo que o lucro por cada unidade vendida é de 4 unidades monetárias e o prejuízo por cada unidade não vendida é de 2 u. m., calcule o stock a constituir no início de cada dia.
 - Resolva a questão da alínea anterior, admitindo adicionalmente que a empresa considera um custo de 1 u.m. por unidade de procura não satisfeita (custo de penúria). Analise os resultados.
75. Da produção diária de uma máquina retiram-se, para efeito de controlo, 10 dos artigos produzidos. A experiência mostra que 80% dos artigos podem considerar-se sem defeito. Calcule a probabilidade de nos 10 artigos controlados haver mais do que 8 artigos sem defeito.
76. Um produtor de refrigerantes resolveu lançar uma campanha publicitária, oferecendo prémios impressos nas cápsulas das garrafas. Durante a campanha, 5% das garrafas distribuídas para venda tinham prémio. Ao adquirir 15 garrafas, qual a probabilidade de se receber, pelo menos, 1 prémio?
77. Depois de cada período de trabalho de 30 minutos uma dada máquina é inspeccionada, necessitando de ser afinada (em média) uma em cada vinte vezes. Calcule:
- A média do número de afinações, numa semana em que a máquina trabalha 20 horas.
 - A probabilidade de, em 8 horas de trabalho: (i) se fazer pelo menos uma afinação; (ii) se fazerem no mínimo 2 afinações, mas não mais de 5.
78. Num exame, um “estudante” responde às questões escolhendo ao acaso entre as possibilidades V ou F. Admitindo que há independência entre as escolhas, determine a probabilidade de:
- A primeira resposta correcta ser na questão 3.
 - No máximo, o estudante ter que dar três respostas até acertar pela primeira vez.
79. A produção de certo artigo em dada unidade fabril é assegurada por duas máquinas, de funcionamentos independentes. Da experiência, pode concluir-se que a proporção de unidades com defeito é de 5%, em cada uma das máquinas.
- Atendendo à capacidade das máquinas, e para efeitos de controlo de qualidade, colhe-se diariamente uma amostra de 4 unidades da máquina 1 e outra de 8 unidades da máquina 2.
- Calcule a probabilidade de se encontrarem 2 unidades com defeito no conjunto das 2 amostras.
 - O artigo é vendido em embalagens de 20, garantindo o fabricante que 90% são de boa qualidade. Calcule a probabilidade dessa garantia ser violada.
80. O número de carros vendidos semanalmente num stand tem distribuição binomial de parâmetros N e p .
- Se a média do número de carros vendidos semanalmente é 1.25 e a variância é 0.9375, qual a percentagem de semanas em que as vendas são inferiores a 2 unidades?
 - Admita que o quociente entre a percentagem de semanas em que as vendas são de 1 unidade e a percentagem de semanas em que as vendas são nulas é igual a 2. Se a variância for 1.125, qual o número médio de carros vendidos semanalmente?

81. Seja X a v.a. que representa o número de pessoas, escolhidas ao acaso e com reposição, que é necessário interrogar, até se encontrar uma cujo aniversário seja a 1 de Janeiro (ignore 29 de Fevereiro e admita que todos os outros dias do ano são igualmente prováveis).
- Qual a distribuição de X ?
 - Calcule o valor esperado, a variância e o desvio padrão de X .
 - Calcule $P(X > 400)$ e $P(X < 300)$.
82. Num teste de escolha múltipla há 5 respostas possíveis para cada questão, mas só uma está correcta. Se a escolha das respostas é feita completamente ao acaso, qual a probabilidade de a primeira resposta certa ser na questão 4?
83. A probabilidade de uma máquina produzir um artigo com defeito é de 0.01. Todos os artigos são inspeccionados, logo após a produção. Sabendo que há independência, calcule a probabilidade de terem que ser inspeccionadas pelo menos 100 unidades, até se encontrar uma defeituosa.
84. Num armazém são empacotadas maçãs em embalagens de 2 kg. No entanto, 4% dos pacotes têm menos de 2 kg. Uma organização de defesa do consumidor vai ao armazém e pesa embalagens, escolhidas ao acaso, e num máximo de 20, até encontrar uma com peso a menos - para fazer a correspondente denúncia. Qual a probabilidade de: (i) não chegar a haver denúncia? (ii) não ser necessário chegar a pesar as 20 embalagens? (iii) ser necessário pesar exactamente as 20 embalagens?
85. Admita-se que 3% dos espelhos retrovisores produzidos por determinada fábrica são defeituosos e que as qualidades dos espelhos produzidos são mutuamente independentes. Num controlo são retirados espelhos ao acaso da linha de montagem. Qual a probabilidade de o primeiro espelho encontrado com defeito ser o oitavo observado?
86. Certo fabricante de automóveis aplica 3 000 diferentes fechaduras nos seus veículos. Admita ter encontrado uma dessas chaves.
- Em média, quantos carros será necessário experimentar, até se encontrar um em que a chave sirva?
 - Qual a probabilidade de se ter que experimentar, no mínimo, 3 000 veículos, até que a chave sirva?
 - Qual a probabilidade de se ter que experimentar, no máximo, 2 000 veículos?
87. Uma moeda equilibrada é lançada ao ar, numa sequência de lançamentos independentes. Calcule a probabilidade de que a primeira “coroa” seja observada no quinto lançamento, sabendo-se que nos três primeiros se observou “cara”.
88. Seja X uma v.a. com distribuição geométrica. Prove a “falta de memória” da distribuição, isto é, prove que $P(X > k + j | X > k) = P(X > j)$, k e j inteiros não negativos.
89. Considere uma sucessão de provas de Bernoulli de parâmetro 0.6. Seja X uma v.a. que representa o número de provas que é necessário realizar até se observarem 4 sucessos. Prove que $P(X = 5) = P(X = 6)$.
90. Seja agora X uma v.a. que representa o número de provas que é necessário realizar até se observarem 15 sucessos. Para que valor do parâmetro se tem $P(X = 20) = P(X = 21)$?
91. Seja X uma v.a. com distribuição binomial negativa de parâmetros k e p .
- Considere a função $h(q) = (1-q)^{-k}$, $0 < q < 1$. Use o desenvolvimento em série de McLaurin para provar que $h'(q) = k(1-q)^{-k-1} = \sum_{r=1}^{\infty} \binom{k+r-1}{k-1} r q^{r-1}$.
 - Usando o desenvolvimento em série de McLaurin da função $h'(q)$, mostre que $E[X - k] = p^k q k (1-q)^{-k-1}$ e deduza que $E[X] = k/p$.

- c) Mostre que $h''(q) = k(k+1)(1-q)^{-k-2} = \sum_{r=2}^{\infty} \binom{k+r-1}{k-1} r(r-1) q^{r-2}$.
- d) Mostre que $E[(X-k)(X-k-1)] = (q^2/p^2)k(k+1)$.
- e) Mostre que $\text{Var}(X-k) = kq/p^2$ e deduza $\text{Var}(X)$.

92. Num lote de 50 objectos há 3 defeituosos. Recolhe-se um subconjunto de 10, escolhidos ao acaso e sem reposição, dos 50.
- Qual a probabilidade de haver 1 objecto defeituoso na amostra?
 - Qual a probabilidade de haver, no máximo, 1 objecto defeituoso na amostra?
 - Qual a probabilidade de haver, pelo menos, 1 objecto defeituoso na amostra?
 - Calcule a média e o desvio padrão do número de objectos defeituosos na amostra.
93. O jogo do Totoloto consiste na extracção de 6 bolas, sem reposição, de uma urna com bolas numeradas de 1 a 49. Também é extraída uma sétima bola (número suplementar), para efeitos do segundo prémio. Cada aposta corresponde a uma escolha de 6 números.
- Qual a probabilidade de sair o quinto prémio, ou seja, de se acertar em 3 números dos 6 sorteados?
 - O segundo prémio é ganho quando se acerta em 5 dos 6 números sorteados e no número suplementar. Qual a probabilidade desse acontecimento se realizar?
94. Num saco há 24 pedaços de doce, dos quais 12 são de noz e 12 são de avelã. Um indivíduo come sucessivamente 5 doces do saco, escolhidos ao acaso.
- Qual a probabilidade de o indivíduo em questão ter comido 2 doces de noz?
 - Qual a probabilidade de ter comido, no máximo, 2 doces de avelã?
 - Calcule a f.p., o valor esperado e a variância do número de doces de noz comidos pelo indivíduo.
95. Numa caixa há 3 bolas brancas e 4 bolas pretas. São extraídas 5 bolas, ao acaso e sem reposição. Seja X a v.a. que representa o número de bolas brancas extraídas. Calcule a f.p., o valor esperado e a variância de X .
96. Os alunos do ISEG foram inquiridos sobre os meios de transporte que utilizam nas suas deslocações. Apurou-se que 10% só andam a pé, 40% andam a pé e de metropolitano, 20% andam de metro e de autocarro, 20% só usam o automóvel e 10% estão noutras situações.
- Defina as variáveis aleatórias convenientes e escreva a respectiva função de probabilidade conjunta, num conjunto de 50 alunos, escolhidos ao acaso (de forma independente) de entre os alunos do ISEG.
 - Nesse conjunto de 50 alunos, qual o valor esperado do número de alunos em cada uma das 5 situações consideradas? E a matriz das variâncias e covariâncias?
 - Calcule a probabilidade de, no conjunto dos 50 alunos, estes se dividirem igualmente por cada uma das situações.
97. O número de pessoas que acorrem a um certo serviço de atendimento ao público é uma v.a. de Poisson com valor médio 15. O serviço funciona das 10 às 16 horas e atende, no máximo, 25 pessoas por dia.
- Qual a probabilidade de, entre as 10 e as 12 horas, chegarem menos de 5 pessoas?
 - Qual a probabilidade de, num dia, a primeira pessoa chegar depois das 12 horas?
 - Qual a proporção de dias em que ficam pessoas por atender?
98. Um livro de 600 páginas contém 300 gralhas. Calcule a probabilidade de uma página conter, pelo menos, 3 erros.
99. O número de ovos postos por minuto em certo aviário tem distribuição de Poisson com média igual a 1.
- Determine a probabilidade do número de ovos postos por minuto ser superior ao dobro da variância.
 - Qual a probabilidade de em 5 minutos serem postos menos de 3 ovos?

- c) Se num período de 10 minutos forem postos 12 ovos, qual a probabilidade de serem postos 10 ou mais ovos nos primeiros 8 minutos?
100. Estatísticas médicas revelam que determinada doença, cujo tratamento é extremamente dispendioso, afecta 1 em cada 5 000 pessoas. Uma seguradora, depois de estudar o assunto, decidiu criar um seguro para cobertura das despesas de tratamento. Num determinado ano, a companhia de seguros tem em carteira 3 000 apólices desse tipo.
- Determine a probabilidade de nenhuma das pessoas seguradas contrair a doença, nesse ano.
 - Desde 1 de Janeiro já foi efectuada uma participação à seguradora. Qual a probabilidade de não se verificarem mais de 3 participações até ao final do ano?
101. De 20 em 20 minutos, parte um comboio (sem atrasos) de uma certa estação. Qual a probabilidade de um utilizador, que desconhece o horário e acaba de chegar à estação, esperar no máximo 5 minutos até à saída do comboio?
102. Seja X uma v.a. com f.d.p. $f(x) = x/2$, $0 < x < 2$. Verifique que $Y = F(X) \sim U(0,1)$.
103. Seja X uma v.a. com distribuição Normal de média 6 e variância 25. Calcule:
- $P(6 \leq X \leq 12)$;
 - $P(0 \leq X \leq 8)$;
 - $P(-2 < X \leq 0)$;
 - $P(X > 21)$;
 - $P(|X - 6| < 12.88)$;
 - a: $P(X - 6 > 5a) = 0.9$.
104. O montante de depósitos à ordem efectuados diariamente em certa agência bancária é uma v.a. com distribuição normal de valor médio 120 u.m. e variância 64.
- Determine a percentagem de dias em que o montante de depósitos à ordem se situa entre 105 e 135 u.m.
 - Determine a probabilidade de o montante de depósitos ser superior à média, nos dias em que é inferior a 125 u.m.
 - Determine a média e a variância do montante de depósitos à ordem efectuados semanalmente (5 dias).
 - Determine um limite inferior (um limite superior) para o montante depositado à ordem, em 90% dos dias.
105. O tempo médio gasto na estafeta 4×100 metros por cada um dos 4 atletas da equipa A é, respectivamente, 10.6, 10.8, 10.5 e 10.7 segundos. Admite-se que os tempos despendidos têm distribuições normais, cujos respetivos desvios padrão são 0.2, 0.5, 0.4 e 0.6 segundos.
- Estabeleça um limite máximo para o tempo gasto pela equipa, em pelo menos 90% dos casos.
 - Se o tempo gasto pela equipa B tiver distribuição normal de média 42.8 segundos e variância 0.8, qual a probabilidade desta equipa vencer a equipa A?
106. Num estabelecimento que vende materiais de construção, sabe-se que as vendas diárias de areia (em centenas de kg) têm um comportamento aleatório traduzido por uma distribuição normal, com média 20 e desvio padrão 2.
- Sabendo que numa manhã o estabelecimento já vendeu uma tonelada de areia, qual a probabilidade de, nesse dia, vir a vender mais de 2,5 toneladas?
 - Qual a probabilidade de, em determinado mês (20 dias), as vendas de areia ultrapassarem 37 toneladas?
107. Para efeitos de comercialização, determinados frutos são classificados pelo tamanho. Como medida, toma-se o respectivo diâmetro máximo, que é uma v.a. com distribuição normal de desvio padrão igual a 5 e valor médio μ . As categorias são as seguintes:
- frutos com diâmetro máximo inferior ou igual a 6;
 - frutos com diâmetro máximo entre 6 e 12;
 - frutos com diâmetro máximo superior ou igual a 12.
- Sabendo que 30% dos frutos são da categoria C3, calcule o diâmetro máximo médio dos frutos e a percentagem de frutos em cada uma das outras categorias.

- b) Se os frutos forem vendidos em embalagens de 6 unidades, incluindo aleatoriamente todos os tamanhos, qual a probabilidade de haver pelo menos dois frutos da categoria C3, numa embalagem escolhida ao acaso?
108. Um eixo produzido por uma máquina considera-se não defeituoso se o desvio do seu diâmetro, relativamente à dimensão projectada, não excede 2 mm. O desvio é uma grandeza aleatória com distribuição normal de média nula e desvio padrão 1,6 mm. Qual a percentagem de eixos não defeituosos produzidos pela máquina?
109. Numa unidade industrial, o tempo de execução de uma peça é uma v.a. com distribuição exponencial de valor médio igual a 5 minutos.
- Em dado momento, verifica-se que determinada peça já está em execução há 2 minutos. Calcule a probabilidade de serem ainda necessários pelo menos 4 minutos até à sua conclusão.
 - Tomadas 5 peças ao acaso, calcule a probabilidade de duas delas terem tido um tempo de execução máximo de 4 minutos.
 - Admitindo que não há peças em stock, acha razoável que, em dado momento, a empresa se tenha comprometido a fornecer 50 peças dentro de 4 horas?
110. Os clientes chegam a uma loja segundo um processo aproximado de Poisson, à taxa média de 10 por hora. Qual a probabilidade da empregada ter que esperar mais de 10 minutos, e menos de 20, até que chegue o primeiro cliente do dia?
111. O tempo que um ceramista leva a fazer uma peça (em horas) é uma v.a. X com distribuição $G(3,2)$.
- Sabendo-se que trabalha 8 horas por dia, calcule a probabilidade de o ceramista fazer 5 peças num dia.
 - O ceramista comprometeu-se a satisfazer uma encomenda de 100 peças em 22 dias (176 horas). Qual a probabilidade de cumprir o prazo?
112. A variável aleatória X tem distribuição do χ^2 com 15 graus de liberdade. Determine dois valores, a e b , tais que $P(a < X < b) = 0.95$. Os valores a e b são únicos? Se não, determine outro par.
113. Sabendo que $X \sim \chi_{(9)}^2$, calcule a : $P(X < a) = 0.995$.
114. Certa v.a. X tem distribuição do χ^2 e sabe-se que $P(X < 22) \cong 0.995$. Quantos graus de liberdade tem a distribuição em causa?
115. Um fornecedor de equipamentos de precisão comprometeu-se a fornecer 5 barras de comprimento igual a 210 mm, sujeitando-se a uma multa M por desvios em relação às especificações. Essa multa é calculada segundo a fórmula $M = 500(X - 210)^2$ (em 10^3 €), onde X é o comprimento real de cada peça, em mm. O processo de fabrico utilizado garante peças cujo comprimento tem distribuição normal de média 210 e desvio padrão 0.15.
- Qual a probabilidade de o fornecedor se sujeitar, em relação às 5 peças, a uma multa superior a € 125 000?
 - Qual o valor esperado e qual a variância da multa total?
116. A v.a. T tem distribuição de Student com 10 graus de liberdade. Determine:
- x , tal que $P(T \leq x) = 0.05$.
 - $P(T \leq 0.26)$.
 - y , tal que $P(T \geq y) = 0.9$.
 - z , tal que $P(-z < T < z) = 0.95$.
117. Seja X uma v.a. tal que $X \sim t_{(12)}$. Determine:
- a : $P(X < a) = 0.05$.
 - $P(X \leq 2.5)$.
 - $P(X \geq b) = 0.95$.
 - $P(-c \leq X \leq c) = 0.9$.

- e) Dois pares de valores, a e b , tais que $P(a < X < b) = 0.95$.
118. Seja X uma v.a, tal que $X \sim t_{(n)}$:
- Determine n , sabendo que $P(X > -2.528) = 0.99$.
 - Calcule $P(0 < X \leq 2.845)$.
119. Sabe-se que $X \sim F_{(3,5)}$. Calcule:
- $a: P(X > a) = 0.95$.
 - $P(5.41 < X < 12.06)$.
 - $b: P(X \geq b) = 0.99$.
120. Sabe-se que $Y \sim t_{(12)}$. Calcule:
- $r: P(Y^2 > r) = 0.05$.
 - $s: P(Y^2 > s) = 0.99$.
121. Considere uma v.a. Y com distribuição F de Snedcor, de parâmetros m e n .
- Se $m = 8$ e $n = 20$, calcule k de forma que $P(Y > k) = 0.95$.
 - Se $m = 5$ e $n = 3$, calcule l de forma que $P(Y \leq l) = 0.05$.
122. Sejam $X \sim N(0, 2^2)$, $Y^2 \sim \chi_{(10)}^2$ e $Z^2 \sim \chi_{(5)}^2$, mutuamente independentes. Calcule:
- $P(Y^2 + Z^2 > 25)$;
 - $P(X/Y \leq 1.5)$;
 - $P(Y^2 > 0.6Z^2)$.
123. Dadas duas variáveis aleatórias, X e Y^2 , independentes e tais que $X \sim N(2, 1)$ e $Y^2 \sim \chi_{(4)}^2$, calcule $P(X - Y < 2)$.
124. Seja (X, Y) um vector aleatório com distribuição normal bidimensional a verificar $\mu_x = 70$, $\sigma_x^2 = 100$, $\mu_y = 80$, $\sigma_y^2 = 169$ e $\rho_{x,y} = 5/13$.
Calcule $E[Y|X = 72]$, $Var[Y|X = 72]$ e $P[Y < 84|X = 72]$.
125. Seja (X, Y) um vector aleatório com distribuição normal bidimensional, tal que $\mu_x = 185$, $\sigma_x^2 = 100$, $\mu_y = 84$, $\sigma_y^2 = 64$ e $\rho_{x,y} = 0.6$, e onde X representa a altura (cm) de um indivíduo escolhido ao acaso em certa população e Y representa o seu peso (kg).
- Determine a distribuição do peso dos indivíduos que medem 1.9 m.
 - Qual a probabilidade de um indivíduo que mede 1.9 m pesar entre 86,4 kg e 95,36 kg?

Capítulo 5

126. Um dado foi enviesado, de modo que a probabilidade de sair a pontuação 6 começasse por ser superior a 1/6 (a “sorte de principiante”), mas fosse diminuindo com o número de lançamentos.

Se $p_N = 2n^2 \left(e^{1/n} - 1 - 1/n \right)^{-1}$ é a probabilidade de se obter esse resultado no N -ésimo lançamento, mostre que $X_N \xrightarrow{p} 0$, sendo $\{X_N\}$ a sucessão de v.a. de Bernoulli, tais que X_N assume o valor 1 quando se obtém 6 no N -ésimo lançamento, $N = 1, 2, \dots$

127. Seja $\{X_N\}$ a sucessão de v.a. de Bernoulli, tais que X_N assume o valor 1 quando o primeiro sucesso na realização de uma sucessão de provas de Bernoulli de parâmetro p se observa no N -ésimo lançamento, $N = 1, 2, \dots$

Verifique que $X_N \xrightarrow{mq} 0$ e identifique a v.a. X , tal que $X_N \xrightarrow{D} X$.

128. Seja $\{X_N\}$ uma sucessão de v.a., tal que a correspondente sucessão das funções de distribuição

$$\text{tem termo geral } F_N(x) = P(X_N \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{N+1}{5N+2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{N+2}{2N+3} & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} \quad N = 1, 2, \dots$$

Mostre que $X_N \xrightarrow{D} X$, onde

$x:$	0	1	2
$f(x):$	0.2	0.3	0.5

129. Admita-se que uma experiência aleatória pode ser repetida tantas vezes quantas se quiser, de forma independente. A probabilidade de um acontecimento A se realizar em cada uma das repetições é $P(A)$.

- a) Quantas vezes se deve repetir a experiência, se se pretende que a frequência relativa de realizações de A não se afaste da verdadeira probabilidade mais do que 0.05, com probabilidade 0.95?
- b) E se for com probabilidade 0.90?

130. Certas sementes germinam de forma independente. Se as condições de luz, humidade e adubagem forem semelhantes, a probabilidade de germinarem é p . Quantas sementes devem ser lançadas à terra, se se pretende uma aproximação de p , a menos de 0.1 e com probabilidade 0.9?

131. Se X_1, X_2, \dots, X_n são não correlacionadas, todas com média μ e variância σ^2 , então $\bar{X}_n = (1/n) \sum X_i$ tem média μ e variância σ^2/n .

Quando $\sigma^2 = 1$, qual deve ser a dimensão de n , de modo que $P(|\bar{X}_n - \mu| < 1) > 0.9$?

132. Um distribuidor de whisky acredita que 5% das garrafas existentes no mercado são falsificadas. Regularmente são verificadas 1000 garrafas nos postos de venda.

Em certa fiscalização detectaram-se 91 garrafas falsificadas. Com um grau de certeza de 0.975, pode continuar a acreditar-se que 0.05 é a verdadeira proporção de garrafas falsificadas?

133. Numa fábrica produz-se um artigo à razão de 100 unidades por dia. Cada unidade do artigo incorpora X gramas de certa matéria-prima, sendo X uma v.a. com média 75 e variância 225.

- a) Determine a percentagem de dias em que o consumo de matéria-prima não excede 7,6 kg.
- b) Os artigos são vendidos em lotes de 200. O custo da matéria-prima é de € 5 por grama. Qual deve ser o preço base de cada lote, de forma a cobrir o custo da matéria-prima incorporada em 95% dos casos?

134. A procura diária de um dado produto tem uma distribuição de Poisson, de média 10. Pretendendo fazer-se a planificação dos stocks, calcule a quantidade anual (250 dias úteis) que deve ser comprada, de forma a cobrir a procura com uma probabilidade de 97.5%.
135. Numa praça de Lisboa estão habitualmente estacionados automóveis em transgressão. Todos os dias a polícia autua 90% dos carros nessa situação, deixando notificação no pára-brisas. O número de pessoas que se apresentam diariamente na esquadra para pagar a multa é uma v.a. de média e variância iguais a 10. Se cada multa for de € 25 e a esquadra estiver aberta 225 dias por ano, qual a probabilidade de a receita anual com as referidas multas ultrapassar € 60 000?
136. Admita que o tempo (minutos) gasto por um operário no processamento de uma embalagem é uma v.a. com distribuição exponencial de média igual a 2 minutos. Cada operário trabalha 5 dias por semana e 8 horas por dia.
- Considerando uma procura semanal de 15 000 embalagens, determine quantos operários deve ter a secção de embalagem, para que haja problemas com a satisfação da procura em não mais de 5% das semanas.
 - Admitindo que na secção de embalagem trabalham 14 operários, determine o número de embalagens que é possível processar semanalmente, com uma probabilidade de 0.99.
137. Os elos de uma corrente de bicicleta têm comprimentos aleatórios de média 0.5 cm e desvio padrão 0.04 cm. As normas de um fabricante de bicicletas exigem que o comprimento das correntes esteja compreendido entre 49 cm e 50 cm.
- Se uma corrente tiver 100 elos, determine a percentagem de correntes que satisfazem as normas do fabricante.
 - Se se utilizassem apenas 99 elos, qual deveria ser o valor do desvio padrão, para que 90% das correntes satisfizessem os requisitos fixados?
138. Para a produção de certo tipo de peças, uma fábrica está equipada com 6 máquinas, de características idênticas e de funcionamentos mutuamente independentes. O custo de manutenção semanal de cada máquina (€) é uma v.a. uniformemente distribuída no intervalo (0,50). Na elaboração do orçamento anual (52 semanas) foi considerada uma verba de € 8 000 para a manutenção das 6 máquinas. Justificando, diga se acha suficiente a dotação orçamental que foi feita.
139. Seja X uma v.a. com distribuição binomial de parâmetros 36 e 0.5.
- Calcule $P[12 < X \leq 15]$: (i) usando a aproximação à distribuição Normal; (ii) usando a aproximação à distribuição Normal e efectuando a correcção de continuidade; (iii) usando $f(x)$ e a calculadora (valor exacto).
 - Calcule $P[X = 20]$ nos mesmos termos da alínea anterior.
140. Seja X uma v.a. com distribuição de Poisson de parâmetro 20.
- Calcule $P[16 < X \leq 21]$, $P[16 \leq X < 21]$; $P[16 < X < 21]$; $P[16 \leq X \leq 21]$: (i) usando a aproximação à distribuição Normal; (ii) usando a aproximação à distribuição Normal e efectuando a correcção de continuidade; (iii) usando a tabela.