Cálculo Estocástico - Aula 2

Mestrado em Matemática Financeira

ISEG

Definition

Um p.e. $\{X_t; t \in T\}$ com valores em $\mathbb{R}$ e onde T é um intervalo de $\mathbb{R}$, diz-se contínuo em probabilidade se, para todo $\varepsilon > 0$ e para todo o $t \in T$, temos

$$\lim_{s \to t} P\left[|X_t - X_s| > \varepsilon\right] = 0.$$

Definition

Seja $p \geq 1$. Um p.e. $\{X_t; t \in T\}$ com valores em $\mathbb{R}$, onde T é um intervalo de $\mathbb{R}$ e tal que $E\left[|X_t|^p\right] < \infty$, diz-se contínuo em média de ordem p, se para todo $t \in T$, temos

$$\lim_{s \to t} E\left[|X_t - X_s|^p\right] = 0.$$

- A continuidade em média de ordem p implica a continuidade em probabilidade.
- A continuidade em probabilidade (ou em média de ordem p) não implica a continuidade das trajectórias do processo.

Example

O processo de Poisson $N = \{N_t, t \geq 0\}$ com intensidade λ é um processo com trajectórias descontínuas. No entanto tem trajectórias contínuas de ordem 2 (recorde que $N_t - N_s \sim Poi(\lambda (t-s)))$ pois

$$\lim_{s \to t} E\left[|N_t - N_s|^2 \right] = \lim_{s \to t} \left[\lambda (t-s) + (\lambda (t-s))^2 \right] = 0.$$

- Como provar que um processo tem trajectórias contínuas?

Theorem

(Critério de continuidade de Kolmogorov): Seja $X = \{X_t; t \in T\}$ um p.e. onde T é um intervalo limitado de $\mathbb{R}$ e suponha que existem $p > 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$E\left[|X_t - X_s|^p \right] \leq C\, |t-s|^{1+\alpha}. \tag{1}$$

Então existe uma versão de X com trajectórias contínuas.

- Mais precisamente, a Eq. (1) implica que para cada $\varepsilon > 0$ existe uma v.a. G_ε tal que (com probabilidade 1)

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq G_\varepsilon(\omega)\, |t-s|^{\frac{1+\alpha}{p} - \varepsilon} \tag{2}$$

  e $E\left[G_\varepsilon^p \right] < \infty$. Ou seja, X tem trajectórias Hölder contínuas de ordem β para todo $\beta < \frac{1+\alpha}{p}$.
- Para uma demonstração deste teorema, ver Karatzas and Shreve, págs. 53-54 (2^a edição).

Probabilidade condicionada

- Consideremos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e sejam A e B dois acontecimentos com $A, B \in \mathcal{F}$ e $P(B) > 0$.
- Probalidade condicionada de A dado B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{3}$$

- A aplicação $A \to P(A|B)$ define uma medida de probabilidade na σ-álgebra $\mathcal{F}$.
- Valor esperado condicionado ou esperança condicionada da v.a. X (integrável) dado B:

$$E(X|B) = \frac{E[X\mathbf{1}_B]}{P(B)}. \tag{4}$$

- Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e seja $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ uma σ-álgebra.

Definition

A esperança condicionada da v.a. integrável X dado $\mathcal{B}$ (ou $E(X|\mathcal{B})$) é uma v.a. integrável Z tal que

1. Z é $\mathcal{B}$-mensurável.
2. Para todo $A \in \mathcal{B}$ temos

$$E(Z\mathbf{1}_A) = E(X\mathbf{1}_A) \tag{5}$$

- Se X for integrável então $Z = E(X|\mathcal{B})$ existe e é única (quase certamente).

Definition

(σ-álgebra gerada): Seja $\mathcal{C}$ uma classe de subconjuntos de Ω. Então, a menor σ-álgebra a conter $\mathcal{C}$ representa-se por $\sigma(\mathcal{C})$ e diz-se a σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}$.

Definition

(σ-álgebra gerada por X): Seja X uma v.a. Então a σ-álgebra $\left\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right\}$ diz-se a σ-álgebra gerada por X.

- Propriedades

1.
$$E(aX + bY|\mathcal{B}) = aE(X|\mathcal{B}) + bE(Y|\mathcal{B}). \tag{6}$$

2.
$$E\left(E(X|\mathcal{B})\right) = E\left(X\right). \tag{7}$$

3. Se X e a σ-álgebra $\mathcal{B}$ são independentes então:
$$E(X|\mathcal{B}) = E\left(X\right) \tag{8}$$

4. Se X é $\mathcal{B}$-mensurável (ou se $\sigma(X) \subset \mathcal{B}$) então:
$$E(X|\mathcal{B}) = X. \tag{9}$$

5. Se Y é $\mathcal{B}$-mensurável (ou se $\sigma(X) \subset \mathcal{B}$) então
$$E(YX|\mathcal{B}) = YE(X|\mathcal{B}) \tag{10}$$

6. Dadas duas σ-álgebras $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ então
$$E(E\left(X|\mathcal{B}\right)|\mathcal{C}) = E(E\left(X|\mathcal{C}\right)|\mathcal{B}) = E(X|\mathcal{C}) \tag{11}$$

7. Considere duas v.a. X e Z tais que Z é $\mathcal{B}$-mensurável e X é independente de $\mathcal{B}$. Seja $h(x, z)$ uma função mensurável tal que $h(X, Z)$ é uma v.a. integrável. Então
$$E\left(h\left(X, Z\right)|\mathcal{B}\right) = E\left(h\left(X, z\right)\right)|_{z=Z}. \tag{12}$$

Nota: primeiro calcula-se $E\left(h\left(X, z\right)\right)$ para qualquer valor z fixo da v.a. Z e depois substitui-se z por Z.

- Desigualdade de Jensen: Se φ é uma função convexa tal que $E\left[|\varphi(X)|\right] < \infty$ então

$$\varphi\left(E(X|\mathcal{B})\right) \leq E(\varphi(X)|\mathcal{B}). \tag{13}$$

- Caso particular: Se $E(|X|^p) < \infty$, $p \geq 1$,

$$|E(X|\mathcal{B})|^p \leq E(|X|^p|\mathcal{B}).$$

Como consequência

$$E\left[|E(X|\mathcal{B})|^p\right] \leq E(|X|^p). \tag{14}$$

- Podemos definir para $C \in \mathcal{F}$,

$$P(C|\mathcal{B}) = E(\mathbf{1}_C|\mathcal{B}).$$

- O conjunto de todas as v.a. de quadrado integrável - $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$\langle X, Y\rangle = E\left[XY\right].$$

O conjunto $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ é um subespaço de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- Dada $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ temos que $E(X|\mathcal{B})$ é a projecção ortogonal de X no subespaço $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ e minimiza a distância em média quadrática de X a $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ no sentido em que

$$E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] = \min_{Y \in L^2(\Omega,\mathcal{B},P)} E\left[(X-Y)^2\right] \tag{15}$$

Exercícios e Exemplos

- Seja X uma v.a. uniforme com valores em $(0, 1]$. Seja $A = \left(0, \frac{1}{4}\right]$. Calcule $E[X]$ e $E[X|A]$.

$$E[X] = \int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$
$$E[X|A] = \frac{E(X\mathbf{1}_A)}{P(A)} = \frac{\int_0^{1/4} xdx}{1/4} = \frac{1}{8}.$$

- Prove que se X e a σ-álgebra $\mathcal{B}$ são independentes então $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$
X e $\mathbf{1}_A$ são independentes se $A \in \mathcal{B}$ e

$$E[X\mathbf{1}_A] = E[X]\,E[\mathbf{1}_A] = E[X]\,P(A) = E[E[X]\,\mathbf{1}_A]$$

e, por definição de esperança condicionada, $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$.

- Prove que se Y é $\mathcal{B}$-mensurável então

$$E(YX|\mathcal{B}) = YE(X|\mathcal{B}).$$

Se $Y = \mathbf{1}_A$ com $A, B \in \mathcal{B}$ temos, por definição de esperança condicionada,

$$\begin{aligned} E\left[\mathbf{1}_A E(X|\mathcal{B})\mathbf{1}_B\right] &= E\left[\mathbf{1}_{A\cap B} E(X|\mathcal{B})\right] \\ &= E\left[X\mathbf{1}_{A\cap B}\right] = E\left[\mathbf{1}_B \mathbf{1}_A X\right]. \end{aligned}$$

Logo $\mathbf{1}_A E(X|\mathcal{B}) = E\left[\mathbf{1}_A X|\mathcal{B}\right]$. Da mesma forma, obtemos o resultado se $Y = \sum_{j=1}^m a_j \mathbf{1}_{A_j}$ (função em escada $\mathcal{B}$-mensurável). O resultado no caso geral prova-se aproximando Y por uma sucessão de funções em escada $\mathcal{B}$-mensuráveis.

- Dada $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, mostre que $E(X|\mathcal{B})$ é a projecção ortogonal de X no subespaço $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ e que

$$E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] = \min_{Y \in L^2(\Omega,\mathcal{B},P)} E\left[(X-Y)^2\right]$$

(1) $E(X|\mathcal{B}) \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ pois é $\mathcal{B}$-mensurávele por (14) temos que

$$E\left[|E(X|\mathcal{B})|^2\right] \leq E(|X|^2) < \infty.$$

(2) Se $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ temos, pelas propriedades 5 e 2

$$\begin{aligned} E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))\, Z\right] &= E\left[XZ\right] - E\left[E(X|\mathcal{B})Z\right] \\ &= E\left[XZ\right] - E\left[E(XZ|\mathcal{B})\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

e portanto $(X - E(X|\mathcal{B}))$ é ortogonal a $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

(3) Como

$$E\left[(X-Y)^2\right] = E\left[(X-E(X|\mathcal{B}))^2\right] + E\left[(E(X|\mathcal{B})-Y)^2\right]$$

temos que $E\left[(X-Y)^2\right] \geq E\left[(X-E(X|\mathcal{B}))^2\right]$e portanto

$$E\left[(X-E(X|\mathcal{B}))^2\right] = \min_{Y\in L^2(\Omega,\mathcal{B},P)} E\left[(X-Y)^2\right].$$

- TPC: Prove as propriedades 1,2, 4 e 6.