

# Movimento Browniano

## Equações Diferenciais e Cálculo Estocástico

ISEG

(ISEG)

Movimento Browniano

1 / 14<sup>1</sup>

## Movimento Browniano

### Definição

Um p.e.  $B = \{B_t; t \geq 0\}$  é um movimento Browniano se

- ①  $B_0 = 0$ .
- ②  $B$  tem incrementos independentes.
- ③ Se  $s < t$ ,  $B_t - B_s$  é uma v.a. com distribuição  $N(0, t - s)$ .
- ④ O processo  $B$  tem trajectórias contínuas.

(ISEG)

Movimento Browniano

2 / 14<sup>2</sup>

# Propriedades do movimento Browniano

- O mov. Browniano é um processo Gaussiano. De facto, as distrib. dimensionalmente finitas de  $B$ , i.e. a distribuição dos vectores  $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$  é normal.
- $E[B_t] = 0$  (resulta da cond. 3).
- Auto-covariância:  $E[B_s B_t] = \min(s, t)$   
Prova: Se  $s \leq t$ :

$$\begin{aligned} E[B_s B_t] &= E[B_s (B_t - B_s) + B_s^2] \\ &= E[B_s (B_t - B_s)] + E[B_s^2] \\ &= E[B_s] E[B_t - B_s] + s = s \end{aligned}$$

- Um p.e. que verifique as condições 1,2 e 3. tem uma versão com trajectórias contínuas.  
Prova: Como  $(B_t - B_s) \sim N(0, t - s)$ , é possível mostrar que

$$E[(B_t - B_s)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} (t - s)^k.$$

Para provar este resultado pode-se usar integração por partes e o método de indução em  $k$ . Com  $k = 2$ , obtemos

$$E[(B_t - B_s)^4] = 3(t - s)^2.$$

Pelo critério de continuidade de Kolmogorov (ver aula 2), existe uma versão de  $B$  com trajectórias contínuas.

- Pode demonstrar-se que existe um p.e. que cumpre as condições 1,2,3 e 4 (pelo teorema da extensão de Kolmogorov (ver Oksendal) e pelo critério de continuidade de Kolmogorov).

- Na def. de mov. Browniano, o espaço de probab. é arbitrário. Contudo é possível descrever a estrutura deste espaço, considerando a aplicação:

$$\begin{aligned}\Omega &\rightarrow C([0, \infty), \mathbb{R}) \\ \omega &\rightarrow B.(\omega)\end{aligned}$$

que a cada elemento  $\omega$  faz corresponder uma função contínua com valores em  $\mathbb{R}$  (a trajectória). O espaço de probabilidade é o espaço de funções contínuas  $C([0, \infty), \mathbb{R})$  equipado com a  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}_C$  e com probabilidade induzida pela aplicação anterior:  $P \circ B^{-1}$  (esta probabilidade diz-se a medida de Wiener).

- Como corolário ao critério da continuidade de Kolmogorov e à fórmula  $E[(B_t - B_s)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} (t - s)^k$ , temos que

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq G_\varepsilon(\omega) |t - s|^{\frac{1+\alpha}{p} - \varepsilon} \leq G_\varepsilon(\omega) |t - s|^{\frac{1}{2} - \varepsilon},$$

para qualquer  $\varepsilon > 0$  e onde  $G_\varepsilon(\omega)$  é uma v.a.

- $|B_t - B_s| \approx |t - s|^{\frac{1}{2}}$
- $E[(B_{t+\Delta t} - B_t)^2] = \Delta t$
- intervalo  $[0, t]$  e partições do intervalo  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  com  $t_j = \frac{tj}{n}$
- Variação total infinita:  $\sum_{k=1}^n |\Delta B_k| \approx n \left(\frac{t}{n}\right)^{1/2} \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .
- Variação quadrática:  $\sum_{k=1}^n |\Delta B_k|^2 \approx n \left(\frac{t}{n}\right) = t$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

- As trajectórias de o mov. Browniano não são diferenciáveis em nenhum ponto (quase certamente).

ideia da prova:

$$\frac{B_{t+\Delta t} - B_t}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\Delta t}Z}{\Delta t} = \frac{Z}{\sqrt{\Delta t}},$$

onde  $Z \sim N(0, 1)$ . Então, esta razão ou taxa tende para  $\infty$  quando  $\Delta t \rightarrow 0$  em probabilidade, pois  $P\left(\frac{Z}{\sqrt{\Delta t}} > K\right) \rightarrow 1$  para qualquer  $K$ , quando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Logo a derivada não existe no ponto  $t$ .

- Auto-semelhança: Se  $B = \{B_t; t \geq 0\}$  é um mov. Browniano então, para qualquer  $a > 0$ , o processo  $\{a^{-1/2}B_{at}; t \geq 0\}$  tb. é um mov. Browniano.
- Exercício: prove que  $\{a^{-1/2}B_{at}; t \geq 0\}$  verifica as condições da def. de mov. Browniano.

## Processos estocásticos relacionados com o mov. Browniano

- Mov. Browniano com drift:

$$Y_t = \mu t + \sigma B_t,$$

com  $\sigma > 0$  e  $\mu$  constantes. Claramente é um processo Gaussiano com  $E[Y_t] = \mu t$  e  $cov(s, t) = E[Y_s Y_t] = \sigma^2 \min(s, t)$ .

- Mov. Browniano geométrico: (modelo proposto por Samuelson, e mais tarde por Black, Scholes e Merton para a descrição dos preços de activos financeiros)

$$X_t = e^{\mu t + \sigma B_t}.$$

A distribuição de  $X$  é lognormal. Ou seja,  $\ln(X_t)$  tem distribuição normal.

- Ponte Browniana:

$$Z_t = B_t - tB_1, \quad t \in [0, 1].$$

Note que  $Z_1 = Z_0 = 0$ . Este processo é Gaussiano com  $E[Z_t] = 0$  e  $cov(s, t) = E[Z_s Z_t] = \min(s, t) - st$ .

# Martingalas e o mov. Browniano

- Considere um mov. Browniano  $B = \{B_t; t \geq 0\}$  definido em  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .
- Defina-se a filtração gerada por  $B$ : é  $\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\}$  com

$$\mathcal{F}_t^B = \sigma \{B_s, s \leq t\}.$$

- Considera-se que  $\mathcal{F}_t^B$  também contém os conjuntos de probabilidade 0 (considera-se que  $N \in \mathcal{F}_0$  sempre que  $P(N) = 0$ ).

- Algumas consequências da inclusão dos conjuntos de probabilidade 0 na filtração
  - ① Qualquer versão de um processo adaptado também é adaptado.
  - ② A filtração é contínua pela direita, i.e.

$$\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^B = \mathcal{F}_t^B.$$

- Exemplo: Se  $B$  é um mov. Browniano então o processo  $X_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$  é adaptado à filtração gerada por  $B$  mas o processo  $Y_t = \sup_{0 \leq s \leq t+1} B_s$  já não é.

## Proposição

Se  $B = \{B_t; t \geq 0\}$  é um mov. Browniano e  $\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\}$  é a filtração gerada por  $B$ , então os seguintes processos são  $\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\}$ -martingalas:

- ①  $B_t$ .
- ②  $B_t^2 - t$ .
- ③  $\exp\left(aB_t - \frac{a^2 t}{2}\right)$ . (TPC: prove que é martingala)

## Demonstração.

1. Claramente  $B_t$  é  $\mathcal{F}_t^B$ -mensurável e integrável. Além disso, como  $B_t - B_s$  é independente de  $\mathcal{F}_s^B$  (pela independência dos incrementos de  $B$ )

$$E[B_t - B_s | \mathcal{F}_s^B] = E[B_t - B_s] = 0.$$

2. Claramente,  $B_t^2 - t$  é  $\mathcal{F}_t^B$ -mensurável e integrável. Pelas propriedades de  $B$  e da esperança condicional:

$$\begin{aligned} E[B_t^2 - t | \mathcal{F}_s^B] &= E[(B_t - B_s + B_s)^2 | \mathcal{F}_s^B] - t \\ &= E[(B_t - B_s)^2] + 2B_s E[B_t - B_s | \mathcal{F}_s^B] + B_s^2 - t \\ &= t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s. \end{aligned}$$

□

- Prova auxiliar: Provemos que  $E \left[ \left( \sum_{k=1}^n (\Delta B_k)^2 - t \right)^2 \right] = 0$ . Usando a independência dos incrementos e o facto de  $E \left[ (\Delta B_k)^2 \right] = \frac{t}{n}$ , temos

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \sum_{k=1}^n (\Delta B_k)^2 - t \right)^2 \right] &= E \left[ \left( \sum_{k=1}^n \left[ (\Delta B_k)^2 - \frac{t}{n} \right] \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k=1}^n E \left[ \left( (\Delta B_k)^2 - \frac{t}{n} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Usando  $E \left[ (B_t - B_s)^{2j} \right] = \frac{(2j)!}{2^j \cdot j!} (t - s)^j$ , temos

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \sum_{k=1}^n (\Delta B_k)^2 - t \right)^2 \right] &= \sum_{j=1}^n \left[ 3 \frac{t}{n} - 2 \left( \frac{t}{n} \right)^2 + \left( \frac{t}{n} \right)^2 \right] \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \left( \frac{t}{n} \right)^2 = 2t \left| \frac{t}{n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

(ISEG)

Movimento Browniano

13  
13 / 14

- Prova auxiliar: Provemos que a variação total  $V = \sup_{\pi} \sum_{k=1}^n |\Delta B_k|$  é infinita com probabilidade 1. Usando a continuidade das trajectórias do mov. Browniano, temos

$$\sum_{k=1}^n (\Delta B_k)^2 \leq \sup_k |\Delta B_k| \sum_{k=1}^n |\Delta B_k| \leq V \sup_k |\Delta B_k| \xrightarrow{|\pi| \rightarrow 0} 0,$$

se  $V < \infty$ . Mas isto contradiz o facto de  $\sum_{k=1}^n (\Delta B_k)^2$  convergir em média quadrática para  $t$ .

- Logo,  $V = \infty$ .

(ISEG)

Movimento Browniano

14  
14 / 14