

# Cap. 3.- Construção e Propriedades do Integral Estocástico

## Equações Diferenciais e Cálculo Estocástico

ISEG

(ISEG)

Cap. 3.- Construção e Propriedades do Integ

1 / 24

### Integrais estocásticos

- Motivação: Consideremos uma equação diferencial "estocástica" do tipo

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \frac{dB_t}{dt}.$$

- " $\frac{dB_t}{dt}$ " é ruído estocástico. Não existe no sentido clássico pois  $B$  não é diferenciável.
- Eq. diferencial estocástica na forma integral:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

- Como definir integrais estocásticos do tipo:

$$\int_0^T u_s dB_s ?$$

onde  $B$  é um movimento Browniano e  $u$  é um processo estocástico adequado.

(ISEG)

Cap. 3.- Construção e Propriedades do Integ

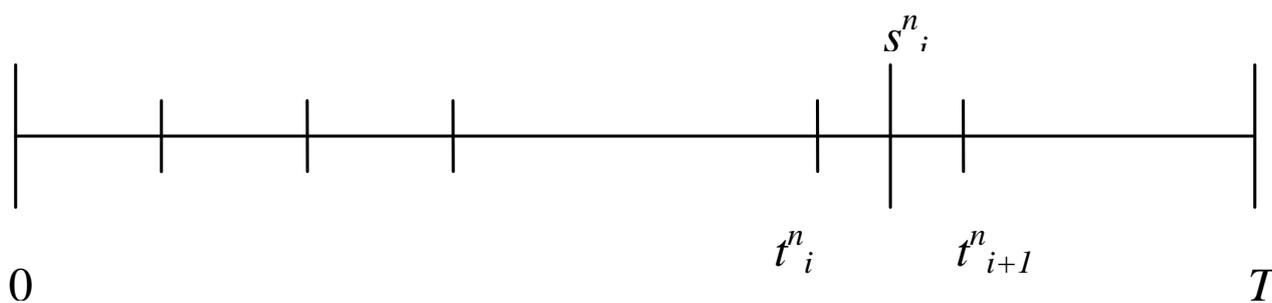
2 / 24

- Alternativa 1: Considerar o integral como um integral de Riemann-Stieltjes.
- Considere uma sucessão de partições de  $[0, T]$  e uma sucessão de pontos intermédios nessas partições:

$$\tau_n: 0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \dots < t_{k(n)}^n = T$$

$$s_n: t_i^n \leq s_i^n \leq t_{i+1}^n, \quad i = 0, \dots, k(n) - 1,$$

tais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_i (t_{i+1}^n - t_i^n) = 0$ .



Integral de Riemann-Stieltjes:

$$\int_0^T f dg := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i^n) \Delta g_i,$$

onde  $\Delta g_i := g(t_{i+1}^n) - g(t_i^n)$ , se o limite existir e for independente das sucessões  $\tau_n$  e  $s_n$ .

- O integral de Riemann Stieltjes (R-S)  $\int_0^T f dg$  existe se  $f$  é contínua e  $g$  tem variação total limitada, i.e.

$$\sup_{\tau_n} \sum_i |\Delta g_i| < \infty.$$

- Se  $f$  é contínua e  $g$  é de classe  $C^1$  então o integral de (R-S)  $\int_0^T f dg$  existe e

$$\int_0^T f dg := \int_0^T f(t) g'(t) dt,$$

- No caso do mov. Browniano  $B$ , é claro que  $B'(t)$  não existe, pelo que não se pode definir o integral trajectorial

$$\int_0^T u_t(\omega) dB_t(\omega) \not\stackrel{\times}{=} \int_0^T u_t(\omega) B'_t(\omega) dt$$

- Em geral, já sabemos que o mov. Browniano tem variação total não limitada e portanto não se pode definir o integral (R-S)

$$\int_0^T u_t(\omega) dB_t(\omega).$$

- Se  $u$  tem trajectórias de classe  $C^1$ , integrando por partes, o integral trajectorial (R-S) existe e

$$\int_0^T u_t(\omega) dB_t(\omega) = u_T(\omega) B_T(\omega) - \int_0^T u'_t(\omega) B_t(\omega) dt.$$

- Problema: Por exemplo,  $\int_0^T B_t(\omega) dB_t(\omega)$  não existe como integral R-S. É útil considerar processos mais irregulares que processos com trajectória de classe  $C^1$ . Como definir o integral estocástico para estes processos?

- Construiremos o integral estocástico  $\int_0^T u_t dB_t$  através de uma abordagem probabilística.

## Definição

Consideraremos processos  $u$  da classe  $L^2_{a,T}$ , que se define como a classe de processos estocásticos  $u = \{u_t, t \in [0, T]\}$ , tais que:

- ①  $u$  é adaptado e progressivamente mensurável: i.e.  $u_t$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável e para todo  $t \in [0, T]$ , a aplicação  $(s, \omega) \rightarrow u_s(\omega)$ , definida em  $[0, t] \times \Omega$  é mensurável relativamente à  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t$ .
- ②  $E \left[ \int_0^T u_t^2 dt \right] < \infty$ .

- A condição 1. é necessária para mostrar que as v.a. do tipo  $\int_0^t u_s ds$  são  $\mathcal{F}_t$ -mensuráveis.
- A condição 2. permite mostrar que  $u$  como função das duas variáveis  $t$  e  $\omega$  pertence ao espaço  $L^2([0, T] \times \Omega)$  e que (pelo teorema de Fubini):

$$E \left[ \int_0^T u_t^2 dt \right] = \int_0^T E [u_t^2] dt = \int_{[0,T] \times \Omega} u_t^2(\omega) dt P(d\omega).$$

- ideia: definiremos  $\int_0^T u_t dB_t$  para  $u \in L^2_{a,T}$  como o limite em média quadrática (limite em  $L^2(\Omega)$ ) de integrais de processos simples.

# Integral estocástico para processos simples

## Definição

Processos simples:  $u \in \mathcal{S}$  (conjunto dos processos simples em  $[0, T]$ ) diz-se um processo simples se

$$u_t = \sum_{j=1}^n \phi_j \mathbf{1}_{(t_{j-1}, t_j]}(t), \quad (1)$$

onde  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , e as v.a.  $\phi_j$  são de quadrado integrável ( $E[\phi_j^2] < \infty$ ) e  $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ -mensuráveis.

## Definição

Se  $u$  é um processo simples da forma (1) ( $u \in \mathcal{S}$ ) então definimos o integral estocástico de  $u$  relativamente ao mov. Browniano  $B$  por

$$\int_0^T u_t dB_t := \sum_{j=1}^n \phi_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).$$

(ISEG)

Cap. 3.- Construção e Propriedades do Integ

9 / 24

## Exemplo

Considere o processo simples

$$u_t = \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} \mathbf{1}_{(t_{j-1}, t_j]}(t).$$

Então

$$\int_0^T u_t dB_t = \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).$$

É evidente que, pela propriedade dos incrementos independentes de  $B$ , temos

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^T u_t dB_t \right] &= \sum_{j=1}^n E [B_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] \\ &= \sum_{j=1}^n E [B_{t_{j-1}}] E [B_{t_j} - B_{t_{j-1}}] = 0. \end{aligned}$$

(ISEG)

Cap. 3.- Construção e Propriedades do Integ

10 / 24

## Proposição

(Propriedade de isometria). Seja  $u \in \mathcal{S}$  um processo simples. Então temos a seguinte propriedade de isometria:

$$E \left[ \left( \int_0^T u_t dB_t \right)^2 \right] = E \left[ \int_0^T u_t^2 dt \right]. \quad (2)$$

## Demonstração.

Com  $\Delta B_j := B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ , temos

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \int_0^T u_t dB_t \right)^2 \right] &= E \left[ \left( \sum_{j=1}^n \phi_j \Delta B_j \right)^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^n E \left[ \phi_j^2 (\Delta B_j)^2 \right] + 2 \sum_{i < j} E \left[ \phi_i \phi_j \Delta B_i \Delta B_j \right]. \end{aligned}$$

□

## Demonstração.

(cont.) Note-se que como  $\phi_i \phi_j \Delta B_i$  é  $\mathcal{F}_{j-1}$ -mensurável e  $\Delta B_j$  é independente de  $\mathcal{F}_{j-1}$ , temos

$$\sum_{i < j} E \left[ \phi_i \phi_j \Delta B_i \Delta B_j \right] = \sum_{i < j} E \left[ \phi_i \phi_j \Delta B_i \right] E \left[ \Delta B_j \right] = 0.$$

Por outro lado, como  $\phi_j^2$  é  $\mathcal{F}_{j-1}$ -mensurável e  $\Delta B_j$  é independente de  $\mathcal{F}_{j-1}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n E \left[ \phi_j^2 (\Delta B_j)^2 \right] &= \sum_{j=1}^n E \left[ \phi_j^2 \right] E \left[ (\Delta B_j)^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^n E \left[ \phi_j^2 \right] (t_j - t_{j-1}) = \\ &= E \left[ \int_0^T u_t^2 dt \right]. \end{aligned}$$

- Outras propriedades de  $\int_0^T u_t dB_t$  para  $u \in \mathcal{S}$ :

- 1 Linearidade: Se  $u, v \in \mathcal{S}$ :

$$\int_0^T (au_t + bv_t) dB_t = a \int_0^T u_t dB_t + b \int_0^T v_t dB_t. \quad (3)$$

- 2 Média 0:

$$E \left[ \int_0^T u_t dB_t \right] = 0. \quad (4)$$

Demonstração.

Exercício: basta usar a definição de integral estocástico para processos simples. □

## Integral de Itô para processos de

$L^2_{a,T}$

Lema

Se  $u \in L^2_{a,T}$  então existe uma sucessão de processos simples  $\{u^{(n)}\}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \int_0^T |u_t - u_t^{(n)}|^2 dt \right] = 0. \quad (5)$$

Demonstração.

Passo 1. Suponha que  $u$  é processo contínuo em média quadrática, ou seja:

$$\lim_{s \rightarrow t} E \left[ |u_t - u_s|^2 \right] = 0.$$

Defina-se  $t_j^n := \frac{j}{n} T$  e

$$u_t^n = \sum_{i=1}^n u_{t_{i-1}^n} \mathbf{1}_{(t_{i-1}^n, t_i^n]}(t). \quad (6)$$

Demonstração.

(cont.) Temos pelo teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
 E \left[ \int_0^T |u_t - u_t^{(n)}|^2 dt \right] &= \left[ \int_0^T E \left[ |u_t - u_t^{(n)}|^2 \right] dt \right] \\
 &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} E \left[ |u_{t_{j-1}^n} - u_t|^2 \right] dt \\
 &\leq T \sup_{|t-s| \leq \frac{T}{n}} E \left[ |u_s - u_t|^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

□

(cont.) Passo 2. (ideia da demonstração) Suponha agora que  $u \in L_{a,T}^2$  e considere a sucessão de processos  $\{v^{(n)}\}$  definidos por

$$v_t^n = n \int_{t-\frac{1}{n}}^t u_s ds.$$

Estes processos são contínuos em média quadrática (até têm as trajectórias contínuas) e pertencem à classe  $L_{a,T}^2$ . Por outro lado, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \int_0^T |u_t - v_t^{(n)}|^2 dt \right] = 0$$

pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |u_t(\omega) - v_t^{(n)}(\omega)|^2 dt = 0.$$

Demonstração.

(cont.) e podemos aplicar o teorema de convergência dominada no espaço  $[0, T] \times \Omega$ , pois pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e mudando a ordem de integração:

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^T |v_t^{(n)}|^2 dt \right] &= E \left[ n^2 \int_0^T \left| \int_{t-\frac{1}{n}}^t u_s ds \right|^2 dt \right] \\ &\leq nE \left[ \int_0^T \left( \int_{t-\frac{1}{n}}^t u_s^2 ds \right) dt \right] \\ &= nE \left[ \int_0^T u_s^2 \left( \int_s^{s+1/n} dt \right) ds \right] \\ &= E \left[ \int_0^T u_s^2 ds \right]. \end{aligned}$$

□

Definição

O integral estocástico ou o integral de Itô do processo  $u \in L^2_{a,T}$  é definido como o limite (em  $L^2(\Omega)$ ):

$$\int_0^T u_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} (L^2) \int_0^T u_t^{(n)} dB_t, \quad (7)$$

onde  $\{u^{(n)}\}$  é uma sucessão de processos simples que satisfaz (5).

- O limite existe, pois devido à prop. de isometria para processos simples, a sucessão  $\left\{ \int_0^T u_t^{(n)} dB_t \right\}$  é uma sucessão de Cauchy em  $L^2(\Omega)$  e portanto é convergente.

Demonstração.

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \int_0^T u_t^{(n)} dB_t - \int_0^T u_t^{(m)} dB_t \right)^2 \right] &= E \left[ \int_0^T \left( u_t^{(n)} - u_t^{(m)} \right)^2 dt \right] \\ &\leq 2E \left[ \int_0^T \left( u_t^{(n)} - u_t \right)^2 dt \right] + 2E \left[ \int_0^T \left( u_t - u_t^{(m)} \right)^2 dt \right] \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

## Propriedades do integral de Itô

- Propriedades do integral de Itô  $\int_0^T u_t dB_t$  para  $u \in L_{a,T}^2$ .

① Isometria:

$$E \left[ \left( \int_0^T u_t dB_t \right)^2 \right] = E \left[ \int_0^T u_t^2 dt \right]. \quad (8)$$

② Média 0:

$$E \left[ \int_0^T u_t dB_t \right] = 0 \quad (9)$$

③ Linearidade:

$$\int_0^T (au_t + bv_t) dB_t = a \int_0^T u_t dB_t + b \int_0^T v_t dB_t. \quad (10)$$

Demonstração.

Estas propriedades verificam-se facilmente para processos  $u \in \mathcal{S}$  (processos simples). Logo, passando ao limite, verificam-se também para processos  $u \in L_{a,T}^2$ .

□

## Exemplo

Vamos mostrar que

$$\int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} T.$$

Como o processo  $u_t = B_t$  é contínuo em média quadrática, consideramos a sucessão de aproximação de processos simples (6), i.e.

$$u_t^n = \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}^n} \mathbf{1}_{(t_{j-1}^n, t_j^n]}(t),$$

com  $t_j^n := \frac{j}{n} T$ .

## Exemplo

(cont.)

$$\begin{aligned} \int_0^T B_t dB_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} (L^2) \int_0^T u_t^{(n)} dB_t = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (L^2) \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}^n} (B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (L^2) \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[ (B_{t_j^n}^2 - B_{t_{j-1}^n}^2) - (B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (B_T^2 - T), \end{aligned}$$

onde se usou o facto de  $E \left[ \left( \sum_{j=1}^n (\Delta B_{t_j^n})^2 - T \right)^2 \right] \rightarrow 0$  e

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (B_{t_j^n}^2 - B_{t_{j-1}^n}^2) = \frac{1}{2} B_T^2.$$

- Cálculo auxiliar: Provemos que  $E \left[ \left( \sum_{j=1}^n (\Delta B_{t_j^n})^2 - T \right)^2 \right] \rightarrow 0$ .

Usando a independência dos incrementos e o facto de

$$E \left[ (\Delta B_{t_j^n})^2 \right] = \Delta t_j^n, \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \sum_{j=1}^n (\Delta B_{t_j^n})^2 - T \right)^2 \right] &= E \left[ \left( \sum_{j=1}^n \left[ (\Delta B_{t_j^n})^2 - \Delta t_j^n \right] \right)^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^n E \left[ (\Delta B_{t_j^n})^2 - \Delta t_j^n \right]^2. \end{aligned}$$

Usando  $E \left[ (B_t - B_s)^{2k} \right] = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} (t - s)^k$ , temos

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \sum_{j=1}^n (\Delta B_{t_j^n})^2 - T \right)^2 \right] &= \sum_{j=1}^n \left[ 3\Delta t_j^n - 2(\Delta t_j^n)^2 + (\Delta t_j^n)^2 \right] \\ &= 2 \sum_{j=1}^n (\Delta t_j^n)^2 = 2T \sup_i |\Delta t_j^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

(ISEG) Cap. 3.- Construção e Propriedades do Integ 23 / 24

- Nota: Pela fórmula  $E \left[ (B_t - B_s)^{2k} \right] = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} (t - s)^k$  temos que

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[ (\Delta B)^2 \right] &= E \left[ (\Delta B)^4 \right] - \left( E \left[ (\Delta B)^2 \right] \right)^2 \\ &= 3(\Delta t)^2 - (\Delta t)^2 = 2(\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Já sabemos também que

$$E \left[ (\Delta B)^2 \right] = \Delta t.$$

Portanto, se  $\Delta t$  é pequeno, a variância de  $(\Delta B)^2$  é desprezável quando comparada com o seu valor esperado  $\implies$  portanto quando  $\Delta t \rightarrow 0$  ou " $\Delta t = dt$ ", temos formalmente:

$$(dB_t)^2 = dt \tag{11}$$