

Cap. 3.- Construção e Propriedades do Integral Estocástico

Cálculo Estocástico

ISEG

(ISEG)

Cap. 3.- Construção e Propriedades do Integ

1 / 14

Integrais estocásticos indefinidos

- Considere um processo estocástico $u \in L^2_{a,T}$. Então, para qualquer $t \in [0, T]$, o processo $u\mathbf{1}_{[0,t]}$ também pertence a $L^2_{a,T}$ e podemos definir o integral estocástico indefinido:

$$\int_0^t u_s dB_s := \int_0^T u_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dB_s.$$

- O processo estocástico $\left\{ \int_0^t u_s dB_s, 0 \leq t \leq T \right\}$ é o integral estocástico indefinido de u relativamente a B .

(ISEG)

Cap. 3.- Construção e Propriedades do Integ

2 / 14

- Principais propriedades do integral estocástico indefinido:

- ① Aditividade: Para $a \leq b \leq c$, temos:

$$\int_a^b u_s dB_s + \int_b^c u_s dB_s = \int_a^c u_s dB_s.$$

- ② Factorização: Se $a < b$ e $A \in \mathcal{F}_a$, então:

$$\int_a^b \mathbf{1}_A u_s dB_s = \mathbf{1}_A \int_a^b u_s dB_s.$$

Esta propriedade permanece válida, substituindo $\mathbf{1}_A$ por qualquer variável aleatória limitada e \mathcal{F}_a -mensurável.

- ③ Propriedade de martingala: Se $u \in L^2_{a,T}$ então o processo integral estocástico indefinido $M_t = \int_0^t u_s dB_s$ é uma martingala relativamente à filtração \mathcal{F}_t .

4. Continuidade: Se $u \in L^2_{a,T}$ então o processo integral estocástico indefinido $M_t = \int_0^t u_s dB_s$ tem uma versão com trajectórias contínuas.
5. Desigualdade maximal para o integral estocástico indefinido: Se $u \in L^2_{a,T}$, $M_t = \int_0^t u_s dB_s$, então para qualquer $\lambda > 0$ temos

$$P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| > \lambda \right] \leq \frac{1}{\lambda^2} E \left[\int_0^T u_t^2 dt \right].$$

- Prova de 1.: Exercício - (TPC).

- Prova de 3.

Seja $u^{(n)}$ uma sucessão de processos simples tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_0^T |u_t - u_t^{(n)}|^2 dt \right] = 0.$$

Seja $M_n(t) = \int_0^t u_s^{(n)} dB_s$. e seja ϕ_j o valor de $u^{(n)}$ no intervalo $(t_{j-1}, t_j]$, com $j = 1, \dots, n$.

Se $s \leq t_k \leq t_{m-1} \leq t$, então:

$$\begin{aligned} & E [M_n(t) - M_n(s) | \mathcal{F}_s] \\ &= E \left[\phi_k (B_{t_k} - B_s) + \sum_{j=k+1}^{m-1} \phi_j \Delta B_j + \phi_m (B_t - B_{t_{m-1}}) | \mathcal{F}_s \right], \end{aligned}$$

e pelas propriedades da esperança condicionada, temos:

$$\begin{aligned} &= E [\phi_k (B_{t_k} - B_s) | \mathcal{F}_s] + \sum_{j=k+1}^{m-1} E [E [\phi_j \Delta B_j | \mathcal{F}_{j-1}] | \mathcal{F}_s] + \\ &+ E [E [\phi_m (B_t - B_{t_{m-1}}) | \mathcal{F}_{t_{m-1}}] | \mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi_k E [B_{t_k} - B_s | \mathcal{F}_s] + \sum_{j=k+1}^{m-1} E [\phi_j E [\Delta B_j | \mathcal{F}_{j-1}] | \mathcal{F}_s] + \\
&+ E [\phi_m E [B_t - B_{t_{m-1}} | \mathcal{F}_{t_{m-1}}] | \mathcal{F}_s]
\end{aligned}$$

e usando a independência dos incrementos do movimento Browniano, obtemos:

$$= 0.$$

Como a convergência em média quadrática implica a convergência em média quadrática das esperanças condicionadas, temos que

$$E [M(t) - M(s) | \mathcal{F}_s] = 0$$

e o integral estocástico é uma martingala.

- Prova de 4: Com a mesma notação que na prova anterior, $M_n(t)$ é claramente um processo com trajetórias contínuas, pois é o integral estocástico de um processo simples (Exercício: Prove esta afirmação). Então, pela desigualdade maximal de Doob aplicada a $M_n - M_m$, com $p = 2$, temos:

$$\begin{aligned}
P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_n(t) - M_m(t)| > \lambda \right] &\leq \frac{1}{\lambda^2} E \left[|M_n(T) - M_m(T)|^2 \right] \\
&= \frac{1}{\lambda^2} E \left[\left(\int_0^T (u_t^{(n)} - u_t^{(m)}) dB_t \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{\lambda^2} E \left[\int_0^T |u_t^{(n)} - u_t^{(m)}|^2 dt \right] \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

onde usámos a isometria de Itô.

Podemos portanto escolher uma sucessão crescente de naturais n_k , $k = 1, 2, \dots$, tal que

$$P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t)| > 2^{-k} \right] \leq 2^{-k}.$$

Os acontecimentos:

$$A_k := \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t)| > 2^{-k} \right\}$$

verificam portanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty.$$

Logo, pelo Lema de Borel-Cantelli, temos que $P(\limsup_k A_k) = 0$ ou

$$P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t)| > 2^{-k} \text{ para infinitos } k \right] = 0.$$

Portanto, para quase todo o $\omega \in \Omega$, temos que existe $k_1(\omega)$ tal que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t)| \leq 2^{-k} \text{ para } k \geq k_1(\omega).$$

Portanto, $M_{n_k}(t, \omega)$ é uniformemente convergente em $[0, T]$ quase certamente e portanto o limite, que denotamos por $J_t(\omega)$, é uma função contínua na variável t . Finalmente, como $M_{n_k}(t, \cdot) \rightarrow M_t(\cdot)$ em média quadrática (ou em $L^2(P)$) para todo o t , então temos que ter

$$M_t = J_t \quad \text{q.c. e para todo o } t \in [0, T].$$

e o integral estocástico indefinido tem uma versão contínua.

Variação quadrática do integral estocástico indefinido

- Seja $u \in L^2_{a,T}$. Então

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} u_s dB_s \right)^2 \xrightarrow{L^1(\Omega)} \int_0^t u_s^2 ds,$$

quando $n \rightarrow \infty$ e com $t_j := \frac{jt}{n}$.

Extensões do integral estocástico

- Pode substituir-se $\{\mathcal{F}_t\}$ (filtração gerada pelo mov. Browniano) por uma filtração maior \mathcal{H}_t tal que o mov. Browniano B_t seja uma \mathcal{H}_t -martingala.
- Podemos substituir a condição 2) $E \left[\int_0^T u_t^2 dt \right] < \infty$. na definição de $L_{a,T}^2$ pela condição (mais fraca):
2') $P \left[\int_0^T u_t^2 dt < \infty \right] = 1$.
- Seja $L_{a,T}$ o espaço de processos que verifica a condição 1 da def. de $L_{a,T}^2$ (i.e. u é progressivamente mensurável) e a condição 2'). O integral estocástico pode ser definido para processos $u \in L_{a,T}$ mas, neste caso, em geral o integral estocástico não tem valor esperado zero nem se verifica a isometria de Itô.

Exercícios:

- Exercício: Prove directamente, usando a definição de integral estocástico que

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds.$$

Sugestão: Note que

$$\sum_j \Delta(s_j B_j) = \sum_j s_j \Delta B_j + \sum_j B_{j+1} \Delta s_j.$$

- Exercício: Considere uma função determinística g tal que $\int_0^T g(s)^2 ds < \infty$. Mostre que o integral estocástico $\int_0^T g(s) dB_s$ é uma variável aleatória Gaussiana e determine a sua média e a sua variância.