Capítulo 1

Teoria dos Erros

1. A tabela seguinte apresenta aproximações ($\overline{x}$) de alguns números reais (x). Calcule em cada caso os erros absoluto e relativo, bem como a percentagem de erro.

$\overline{x}$	1.41	0.999	3.1213
x	$\sqrt{2}$	$1/10$	π

2. Seja $\bar{x} = 30.58$ uma aproximação do comprimento x, com erro inferior a 2%. Considere ainda outra grandeza $y \in [1.00, 1.01]$.

(a) O erro referido para a grandeza x é relativo ou absoluto? Justifique.

(b) Qual o valor $\bar{y}$ que devemos escolher (para aproximar y), de modo a obter a maior precisão possível? Indique majorantes para os erros relativo e absoluto de y.

(c) Com base nas alíneas anteriores, indique o número de algarismos significativos de $\bar{x}$ e $\bar{y}$. (Nota: dizemos que $\bar{u}$ tem d algarismos significativos se $|u - \bar{u}| \leq 0.5 \times 10^{-d}$).

3. Escreva aproximações de $1/3$, e^2 e $\sqrt{7}$ com cinco algarismos significativos.

4. O número de dígitos correctos c de uma aproximação $\overline{x}$ do número real x pode ser definido como

$$c = -\log_{10}\left(|x - \overline{x}|/|x|\right)$$

experimente a fórmula referida para os valores

$\overline{x}$	130	0.0130	1.3
x	133.333	0.013333	1.33333

Parece-lhe satisfatória a definição dada? Compare com os valores que se obtêm ao usar a definição habitual de número de algarismos significativos.

5. Considere os valores $A = 0.492, B = 0.603, C = -0.494, D = -0.602, E = 10^{-5}$, a partir dos quais se pretende calcular

$$F = \frac{A+B+C+D}{E}.$$

Imaginando que tem uma máquina de calcular que representa números reais num sistema de ponto flutuante com 3 digitos na mantissa, calcule F por dois processos distintos, mas matematicamente equivalentes: **i.** calcular $(A+B)$ e $(C+D)$, somar os valores anteriores e, finalmente, dividir por E; **ii.** calcular $(A+C)$ e $(B+D)$, somar os valores anteriores e, finalmente, dividir por E. Quais os resultados obtidos por cado um dos processos descritos? Comente.

6. Determine que precisão deve ter uma aproximação de π de modo a podermos calcular $\sqrt{\pi}$ com erro absoluto inferior a 0.5×10^{-4}.

7. Deduza as seguintes fórmulas de propagação de erro:

(a) Erros relativo e absoluto para o quociente.

(b) Erros relativo e absoluto para a subtracção.

Comente os resultados obtidos quanto ao modo de propagação do erro nos dois casos analisados.

8. Considere os números $x = \pi$ e $y = 2199/700$.

(a) Obtenha aproximações $\overline{x}$ e $\overline{y}$ (de x e y) com 4 algarismos significativos. Obtenha ainda $\overline{x} - \overline{y}$.

(b) Calcule os erros relativo e absoluto de $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{x} - \overline{y}$.

(c) Represente em ponto flutuante, com 6 algarismos na mantissa, os números x e y. Determine $fl(fl(x) - fl(y))$.

9. Considere a função $f(x) = \log x$ e obtenha as fórmulas de propagação do erro relativo e absoluto.

10. A série de Taylor com resto para $\sin x$ escreve-se

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

onde

$$R_{2n}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin \eta, \quad \eta \in [0, x]$$

(a) Use os primeiros 4 termos da série anterior para estimar o valor de $\sin(\pi/4)$.

(b) Obtenha um majorante do respectivo erro de truncatura.

(c) Quantos algarismos significativos possui a estimativa calculada na alínea (a)?

(d) Desprezando os erros de arredondamento, quantos termos da série são necessários para calcular $\sin(\pi/4)$ com erro absoluto inferior a 10^{-12}.

11. Utilize a fórmula de Taylor de modo a que, para x próximo de zero, seja evitado o cancelamento subtractivo em no cálculo de $f(x) = e^x - e^{-x}$.

12. Proceda à reformulação das seguintes expressões, de modo a não ocorrer o cancelamento subtractivo, próximo dos pontos indicados.

(a) $f(x) = \sin x - \cos x$, x próximo de $\frac{\pi}{4}$.

(b) $f(x) = 1 - \cos x$, x próximo de 0.

(c) $f(x) = \left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right)^{-1}$, x próximo de 0.

13. Considere a seguinte equação algébrica

$$y^2 + 2ay - b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(a) Estude o condicionamento do problema, em função dos parâmetros a, b.

(b) Para $a \gg b > 0$, verifique que o algoritmo:

$$y = -a + \sqrt{a^2 + b}$$

para determinar a raíz de menor valor absoluto da equação é numericamente instável. Construa um algoritmo estável.

14. Considere o cálculo de $w = \sqrt{x+4} - 2$, para $|x| \ll 1$.

(a) Trata-se de um problema bem condicionado? Justifique.

(b) Verifique que a expressão que define w conduz a um algoritmo instável. Obtenha uma outra expressão para w, que permita construir um algoritmo estável.

15. O perímetro de um triângulo rectângulo pode ser calculado de acordo com a fórmula

$$P = (\cos\alpha + \sin\alpha + 1)h$$

onde α e h são a medida de um dos ângulos agudos e o comprimento da hipotenusa, respectivamente.

(a) Obtenha a expressão do erro relativo para P.

(b) Estude o condicionamento e estabilidade do algoritmo.

16. Para qualquer $x_0 > -1$ a sucessão definida recursivamente por

$$x_{n+1} = 2^{n+1}\left(\sqrt{1 + 2^{-n}\, x_n} - 1\right), n \geq 0$$

converge para $\log(x_0 + 1)$. Reformule esta expressão, de modo a evitar perda de significância do resultado.

17. Conhecido $y = \cos x$, sabe-se que $\sin x$ pode ser obtido através da expressão $z = \sqrt{1 - y^2}$. Obtenha a expressão do erro δ_z de z. Para valores de x próximos de zero, o que pode afirmar quanto à precisão do resultado?

18. O número de Neper e define-se como sendo o limite

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Usando os valores $n = 2^k, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$ tente obter este limite no seu computador. Compare com o valor exacto e explique o sucedido