Cap. 4.- A Fórmula de Itô

ISEG

Variação quadrática do integral estocástico indefinido

- Seja $u \in L^2_{a,T}$. Então

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} u_s ds \right)^2 \xrightarrow{L^1(\Omega)} \int_0^t u_s^2 ds,$$

quando $n \to \infty$ e com $t_j := \frac{jt}{n}$.

Extensões do integral estocástico

- Pode substituir-se $\{\mathcal{F}_t\}$ (filtração gerada pelo mov. Browniano) por uma filtração maior $\mathcal{H}_t$ tal que o mov. Browniano B_t seja uma $\mathcal{H}_t$-martingala.
- Podemos substituir a condição 2) $E\left[\int_0^T u_t^2 dt\right] < \infty.$ na definição de $L^2_{a,T}$ pela condição (mais fraca):
  2') $P\left[\int_0^T u_t^2 dt < \infty\right] = 1.$
- Seja $L_{a,T}$ o espaço de processos que verifica a condição 1 da def. de $L^2_{a,T}$ (i.e. u é progressivamente mensurável) e a condição 2'). O integral estocástico pode ser definido para processos $u \in L_{a,T}$, mas neste caso, em geral o integral estocástico não tem valor esperado zero nem se verifica a isometria de Itô.

Fórmula de Itô unidimensional

- A fórmula de Itô é uma versão estocástica da regra da cadeia.
- Exemplo:

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$$
$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + t$$
$$d\left(B_t^2\right) = 2B_t dB_t + dt$$

- $\approx$ (desenvolvimento de Taylor de B_t^2 como função de B_t e t e com a convenção $(dB_t)^2 = dt$)

Fórmula de Itô unidimensional

- Se f é de classe C^2 vamos ter que

$$\begin{aligned} f\left(B_t\right) &= \text{integral estoc. indefinido+processo com trajec. diferenciáveis} \\ &= \text{processo de Itô} \end{aligned}$$

- Defina-se $L^1_{a,T}$ como o espaço de processos v tais que
  1) v é progressivamente mensurável
  2") $P\left[\int_0^T |v_t|\, dt < \infty\right] = 1.$

Fórmula de Itô unidimensional

- Um processo contínuo e adaptado $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ diz-se um processo de Itô se verifica:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s dB_s + \int_0^t v_s ds, \tag{1}$$

onde $u \in L_{a,T}$ e $v \in L^1_{a,T}$.

Fórmula de Itô unidimensional

Teorema

(Fórmula de Itô unidim.): Seja $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ um processo de Itô da forma (1). Seja $f(t,x)$ uma função de classe $C^{1,2}$. Então o processo $Y_t = f(t, X_t)$ é um processo de Itô e temos:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, u_s dB_s$$
$$+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, v_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, u_s^2 ds.$$

- Na forma diferencial, a fórmula de Itô fica:

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\, dX_t$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\,(dX_t)^2.$$

onde $(dX_t)^2$ é calculado usando a tabela de produtos:

$\times$	dB_t	dt
dB_t	dt	0
dt	0	0

- A fórmula de Itô para $f(t,x)$ e $X_t = B_t$ ou seja $Y_t = f(t, B_t)$.

$$f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s)\, ds.$$

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t)\, dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t)\, dt.$$

- A fórmula de Itô para $f(x)$ e $X_t = B_t$ ou seja $Y_t = f(B_t)$.

$$df(B_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(B_t)\, dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_t)\, dt.$$

A fórmula de Itô multidimensional

- Suponha que $B_t := \left(B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^m\right)$ é um movimento Browniano de dimensão m, ou seja, as componentes B_t^k, $k = 1, ..., m$ são movimentos Brownianos unidimensionais independentes.
- Considere um processo de Itô de dimensão n, definido por

$$
\begin{aligned}
X_t^1 &= X_0^1 + \int_0^t u_s^{11} dB_s^1 + \cdots + \int_0^t u_s^{1m} dB_s^m + \int_0^t v_s^1 ds, \\
X_t^2 &= X_0^2 + \int_0^t u_s^{21} dB_s^1 + \cdots + \int_0^t u_s^{2m} dB_s^m + \int_0^t v_s^2 ds, \\
&\vdots \\
X_t^n &= X_0^n + \int_0^t u_s^{n1} dB_s^1 + \cdots + \int_0^t u_s^{nm} dB_s^m + \int_0^t v_s^n ds.
\end{aligned}
$$

A fórmula de Itô multidimensional

- Em notação diferencial temos:

$$dX_t^i = \sum_{j=1}^m u_t^{ij} dB_t^j + v_t^i dt,$$

com $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Ou então:

$$dX_t = u_t dB_t + v_t dt,$$

onde v_t é um processo n-dimensional, u_t é uma matriz $n \times m$ de processos.
- Assumimos que as componentes de u pertencem a $L_{a,T}$ e as componentes de v pertencem a $L_{a,T}^1$

A fórmula de Itô multidimensional

- Nestas condições, se $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é de classe $C^{1,2}$ então $Y_t = f(t, X_t)$ é um processo de Itô e temos a fórmula de Itô

$$\begin{aligned} dY_t^k &= \frac{\partial f_k}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(t, X_t)\, dX_t^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)\, dX_t^i dX_t^j. \end{aligned}$$

A fórmula de Itô multidimensional

- O produto dos diferenciais $dX_t^i dX_t^j$ é calculado de acordo com as regras:

$$\begin{aligned} dB_t^i dB_t^j &= \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ dt & \text{se } i = j \end{cases}, \\ dB_t^i dt &= 0, \\ (dt)^2 &= 0. \end{aligned}$$

A fórmula de Itô multidimensional

- No caso particular de B_t ser um mov. Browniano n-dimensional e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ser de classe C^2 com $Y_t = f(B_t)$ então a fórmula de Itô é

$$f(B_t) = f(B_0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_t)\, dB_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(B_t) \right) ds$$

Fórmula de integração por partes

- Temos que

$$dX_t^i dX_t^j = \sum_{k=1}^{m} u_t^{ik} u_t^{jk} dt = \left[u_t \left(u_t \right)^T \right]_{ij} dt.$$

- Fórmula de integração por partes: Se X_t^1 e X_t^2 são processos de Itô e $Y_t = X_t^1 X_t^2$, então pela fórmula de Itô com $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, temos

$$d\left(X_t^1 X_t^2 \right) = X_t^2 dX_t^1 + X_t^1 dX_t^2 + dX_t^1 dX_t^2.$$

Ou seja:

$$X_t^1 X_t^2 = X_0^1 X_0^2 + \int_0^t X_s^2 dX_s^1 + \int_0^t X_s^1 dX_s^2 + \int_0^t dX_s^1 dX_s^2.$$

Exemplo

t

- Considere o processo

$$Y_t = \left(B_t^1\right)^2 + \left(B_t^2\right)^2 + \cdots + \left(B_t^n\right)^2.$$

Represente este processo em termos de integrais estocásticos relativamente ao mov. Browniano n-dimensional.

- Pela fórmula de Itô multidimensional, com $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ temos:

$$\begin{aligned} dY_t &= 2B_t^1 dB_t^1 + \cdots + 2B_t^n dB_t^n \\ &\quad + ndt. \end{aligned}$$

ou seja:

$$Y_t = 2\int_0^t B_s^1 dB_s^1 + \cdots + 2\int_0^t B_s^n dB_s^n + nt.$$

Exercício

t

- Seja $B_t := \left(B_t^1, B_t^2\right)$ um movimento Browniano bidimensional. Represente o processo

$$Y_t = \left(B_t^1 t, \left(B_t^2\right)^2 - B_t^1 B_t^2\right)$$

como um processo de Itô.

- Pela fórmula de Itô multidimensional, com $f(t,x) = f(t, x_1, x_2) = \left(x_1 t, x_2^2 - x_1 x_2\right)$, temos:

$$\begin{aligned} dY_t^1 &= B_t^1 dt + t dB_t^1, \\ dY_t^2 &= -B_t^2 dB_t^1 + \left(2B_t^2 - B_t^1\right) dB_t^2 + dt \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} Y_t^1 &= \int_0^t B_s^1 ds + \int_0^t s dB_s^1, \\ Y_t^1 &= -\int_0^t B_s^2 dB_s^1 + \int_0^t \left(2B_s^2 - B_s^1\right) dB_s^2 + t. \end{aligned}$$

Ideia da demonstração da fórmula de Itô unidimensional

t

- O processo

$$Y_t = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, u_s dB_s$$
$$+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, v_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, u_s^2 ds.$$

  é um processo de Itô.
- Assumimos que f e as suas derivadas parciais são limitadas (o caso geral pode provar-se aproximando f e as suas derivadas parciais por funções limitadas).
- Como sabemos, o integral estocástico pode ser aproximado por uma sucessão de integrais estocásticos de processos simples e portanto podemos assumir que u e v são processos simples.

- Dividindo o intervalo $[0, t]$ em n sub-intervalos iguais temos:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(t_{k+1}, X_{t_{k+1}}) - f(t_k, X_{t_k}) \right).$$

- Pela fórmula de Taylor:

$$f(t_{k+1}, X_{t_{k+1}}) - f(t_k, X_{t_k}) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_k, X_{t_k})\, \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}(t_k, X_{t_k})\, \Delta X_k$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_k, X_{t_k})\, (\Delta X_k)^2 + Q_k,$$

  onde Q_k é o resto ou erro da fórmula de Taylor.

- Temos também que

$$\Delta X_k = X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} v_s ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} u_s dB_s$$
$$= v(t_k)\Delta t + u(t_k)\Delta B_k + S_k,$$

onde S_k é o resto ou erro.

- Daqui, obtemos:

$$(\Delta X_k)^2 = (v(t_k))^2(\Delta t)^2 + (u(t_k))^2(\Delta B_k)^2$$
$$+ 2v(t_k)u(t_k)\Delta t \Delta B_k + P_k,$$

onde P_k é o resto.

- Substituindo estes termos, temos:

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = I_1 + I_2 + I_3 + \frac{1}{2} I_4 + \frac{1}{2} K_1 + K_2 + R,$$

onde

$$I_1 = \sum_k \frac{\partial f}{\partial t}(t_k, X_{t_k})\Delta t,$$
$$I_2 = \sum_k \frac{\partial f}{\partial t}(t_k, X_{t_k}) v(t_k)\Delta t,$$
$$I_3 = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x}(t_k, X_{t_k}) u(t_k)\Delta B_k,$$
$$I_4 = \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_k, X_{t_k})(u(t_k))^2(\Delta B_k)^2.$$

$$K_1 = \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t_k, X_{t_k}\right)\left(v\left(t_k\right)\right)^2 (\Delta t)^2 ,$$
$$K_2 = \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t_k, X_{t_k}\right) v\left(t_k\right) u\left(t_k\right) \Delta t \Delta B_k ,$$
$$R = \sum_k \left(Q_k + S_k + P_k\right).$$

- Quando $n \longrightarrow \infty$, é simples mostrar que

$$I_1 \longrightarrow \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds,$$
$$I_2 \longrightarrow \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, v_s ds,$$
$$I_3 \longrightarrow \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, u_s dB_s.$$

- Como já vimos antes (variação quadrática do movimento Browniano), temos que

$$\sum_k (\Delta B_k)^2 \longrightarrow t,$$

pelo que

$$I_4 \longrightarrow \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, u_s^2 ds.$$

- Por outro lado, temos também que

$$K_1 \longrightarrow 0,$$
$$K_2 \longrightarrow 0.$$

- Também se pode mostrar (mas é mais difícil e mais técnico) que

$$R \longrightarrow 0.$$

- Conclusão: no limite obtemos a fórmula de Itô.