Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
Análise Numérica

Prova para Dispensa de Exame Final 17/6/2000

---

1. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Demonstre que A admite uma factorização de Cholesky, e determine-a.

(b) Com base nessa factorização, calcule o determinante da matriz.

(c) Também com base no resultado da alínea (a), obtenha as factorizações de Crout e Doolitle para a matriz A. (Caso não tenha respondido à alínea (a), considere que $L_{ij} = 2, \quad i \geq j$).

(d) Suponha que pretendemos resolver o sistema $A\,x = b$, mas apenas dispomos de uma aproximação de b que verifica $\|b - \tilde{b}\|_\infty < \varepsilon$. Estime o erro cometido ao tomar como aproximação de x a solução do sistema $A\,\tilde{x} = \tilde{b}$ (Note que $\|A^{-1}\|_\infty = 7/2$).

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função:

x_i	0	1	2	3
f_i	1	0	13	c

(a) Determine o polinómio de grau ≤ 2 que interpola f nos três primeiros pontos da tabela.

(b) Usando o resultado da alínea anterior, determine o polinómio de grau ≤ 3 que interpola f em todos os pontos da tabela. Que valor deve ter a constante c para que esse polinómio seja de grau 2?

(c) Admita, nesta alínea e seguintes, que $f(x) = x^4 + a_1 x + a_0$. Sem calcular a_0, a_1, determine um majorante para o erro de interpolação $|e(x)| = |f(x) - p_2(x)|$, para todo o $x \in [0, 2]$, onde p_2 é o polinómio obtido na alínea (a).

(d) Usando todos os pontos tabelados, e $c = 76$, determine um aproximação de $\int_0^3 f(x)\,dx$ usando o método dos trapézios. Estime o erro cometido.

(e) Usando uma fórmula de diferenças finitas à sua escolha, estime o valor de $f'(1)$, apresentando um majorante para o erro cometido.

Cotação: **1.**(a)1.5 (b)0.5 (c)1.5 (d)1.0 ; **2.**(a)1.0 (b)1.0 (c)1.0 (d)1.5 (e)1.0

3. Seja f uma função definida na recta real que verifica

$$|f^{(m)}(x)| \leq M^m, \ \ x \in I\!R, \ \ (m = 0, 1, 2, \cdots),$$

onde $M > 0$ é uma constante. Seja P_{2n-1} o polinómio interpolador de f nos pontos $-n, -n+1, \cdots, -1, 1, \cdots, n-1, n$. Prove que se $M < 2$ então

$$\lim_{n\to\infty} p_{2n-1}(0) = f(0).$$

(Note que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \to \infty$).

4. Pretende construir-se uma fórmula de quadratura para aproximar integrais do tipo $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{|x|}\, dx$, com f função contínua. Calcule os pesos da quadratura

$$Q(f) = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1),$$

de modo que ela seja exacta para qualquer polinómio de grau ≤ 2. Determine ainda o grau da quadratura obtida.

5. Dado $x_0 \in [0, +\infty)$, Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{x_0}}}}_{n \text{ raízes quadradas}} = 2$$

e determine a ordem de convergência.(**Sugestão:** Utilize o teorema do ponto fixo com uma função iteradora adequada)

6. Considere a seguinte equação diferencial de 1ª ordem

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - t + 4y(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

cuja solução exacta é $y(t) = t/4 - 3/16 + (19/16)e^{4t}$.

(a) Obtenha um valor aproximado y_2 para $y(0.2)$, usando o método de Euler com passo $h = 0.1$.

(b) Recorrendo a um resultado teórico, deduza um majorante para $|y(0.2) - y_2|$. Compare com o erro de facto cometido.

(c) Utilize o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com $h = 0.2$ para obter uma aproximação de $y(0.2)$. Compare com o resultado obtido em (a).

Cotação: **3.** 2.0 ; **4.** 2.0 ; **5.** 2.0 ; **6.**(a)1.5 (b)1.0 (c)1.5