Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
Análise Numérica

Prova para Dispensa de Exame Final 15/9/2000

---

1. Considere a seguinte matriz(de dimensão $n \times n$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ concretamente } a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, j+1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Mostre que o número de condição desta matriz cresce linearmente com a dimensão n. Comente a afirmação: *"Existindo erros nos dados [segundo membro do sistema linear], as matrizes como a descrita são pouco convenientes no tratamento de problemas de grande dimensão"*.

2. Seja A uma matriz invertível que admite uma factorização $L\,D\,L^T$ (L triangular inferior com 1's na diagonal e D matriz diagonal). Em que condições poderá esta factorização coincidir com a decomposição em valores singulares da matriz ?

3. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Resolva-o usando o método de Doolitle.

4. Considere a equação diferencial de 2ª ordem $\alpha\, y''(x) + y'(x)\, y(x)^\alpha + x^2 y(x) = 1$.

(a) Escreva esta equação como um sistema de equações diferenciais de **1ª ordem**.

(b) Tomando $\alpha = 1$ e condições iniciais $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$, calcule um valor aproximado para $y(1)$ e $y'(1)$, utilizando o método de Euler com passo $h = 0.5$.

5. Seja $f : I\!R \to I\!R$ uma função de classe C^∞ que verifica $|f^{(m)}(x)| \leq M^m,\ \ x \in I\!R,\ \ (m = 0, 1, 2, \cdots)$, onde $M > 0$ é uma constante. Seja ainda P_{2n-1} o polinómio interpolador de f nos pontos $-n, -n+1, \cdots, -1, 1, \cdots, n-1, n$. Prove que se $M < 2$ então

$$\lim_{n\to\infty} p_{2n-1}(0) = f(0).$$

(Note que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n, \quad n \to \infty$).

Cotação: **1.** 2.5 ; **2.** 1.0 ; **3.** 2.0 ; **4.**(a)1.0 (b)1.5 ; **5.** 2.5

6. Sabe-se que uma dada função é um polinómio mónico de grau 3, apenas se conhecendo experimentalmente os seus valores nos pontos seguintes:

x_i	0	0.5	1.5
f_i	-1.0	-0.625	1.625

(a) Determine o polinómio de grau ≤ 2 que interpola f nos pontos indicados.

(b) Usando o resultado da alínea anterior, forneça um valor aproximado para $f(1.3)$. Determine um majorante para o erro cometido.

(c) Sabendo que $f'(0) = 1.0$, $f'(0.5) = 0.75$ e $f'(1.5) = 4.75$, determine o polinómio interpolador de Hermite de f nos nós indicados.

7. Dado $x_0 \in [0, +\infty)$, considere a sucessão de termo geral $u_n = \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots \sqrt{x_0}}}}_{n \text{ raízes quadradas}}$.

Mostre que a sucessão converge para um número $z \in [0, +\infty[$, e calcule esse número. Determine ainda a ordem de convergência.(**Sugestão:** Utilize o teorema do ponto fixo com uma função iteradora adequada)

8. Seja $a > 0$ e $f, g : [-a, a] \to [-a, a]$ funcões reais de classe C^1 verificando $|f'(x)| + |g'(x)| < 1, \quad \forall_x \in [-a, a]$. Considere o sistema (em geral não linear)

$$\begin{cases} x = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ \\ y = g\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{cases}$$

(a) Mostre que este sistema tem uma única solução em $[-a, a] \times [-a, a]$.

(b) Seja $a = 0$, $f(0) = 1$, $g(0) = 1$ e $f(1) = 1$. Determine o valor exacto da solução do sistema.

9. Pretende construir-se uma fórmula de quadratura para aproximar integrais do tipo

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} f(x)\, dx,$$

com f função contínua. Determine a, A_0, A_1 de modo que a regra de quadratura $Q(f) = A_0 f(-a) + A_1 f(a), \quad a > 0$ seja exacta para polinómios de grau o maior possível. Indique ainda o grau da quadratura obtida.(**note que** $I(1) = \pi,\ I(x) = 0,\ I(x^2) = \pi/2,\ I(x^3) = 0,\ I(x^4) = 3\pi/8, \cdots$)

Cotação: **6.** (a)1.5 (b)1.5 (c)1.5 ; **7.** 2.0 ; **8.**(a)2.0 (b)1.0 ; **9.** 2.0