INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

Análise Numérica

Época Normal 9 de Junho de 2009

Parte I (10 valores)

1. Considere a função $f(x) = e^{-x} - x^2$.

   (a) Mostre que f tem uma única raíz α no intervalo $[0,1]$ e estime o número de iterações do método da bissecção necessárias para garantir um erro absoluto inferior a 0.5×10^{-10}.

   (b) Mostre que α é o único ponto fixo de $\phi(x) = x + \frac{1}{4}(e^{-x} - x^2)$ e que o método do ponto fixo converge para α, qualquer que seja $x_0 \in [0,1]$. Calcule 3 iterações do método do ponto fixo e forneça um majorante para o erro cometido. Diga ainda quantas iterações são necessárias para que o erro seja inferior a 0.5×10^{-10}.

2. Considere a função $f(x) = \sin(2\pi x)$, e seja $p_n(x)$ o polinómio interpolador de f em $(n+1)$ pontos equidistantes no intervalo $[0,1]$ ($x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, \cdots, x_n = nh = 1$).

   (a) Determine $p_3(x)$ e forneça um majorante para $\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - p_3(x)|$.

   (b) Prove que $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(x) - p_n(x)| = 0, \quad \forall x \in [0,1]$. Qual o menor valor de n que deve ser considerado, de modo que o erro de interpolação seja inferior 0.5×10^{-6} ?

   (c) Considere agora, para cada $h > 0$ fixo, o polinómio $q_n(x)$ que interpola f nos pontos $0, h, 2h, \cdots, nh$. Para que valores de h podemos garantir que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n(x) = f(x), \quad \forall x > 0$?

3. Sejam $y_0, y_1, \cdots, y_n$ medições correspondentes aos pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n$. Mostre que a recta de regressão $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$, que aproxima os dados no sentido dos mínimos quadrados, passa no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, em que $\bar{x} = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=0}^{n} x_i$ e $\bar{y} = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=0}^{n} y_i$. (Observação: Isto significa que a recta de regressão passa no baricentro do conjunto dos dados)

4. O comprimento de um arco de curva da função $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ pode ser determinado pela expressão $s = \int_a^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$. Determine o comprimento da curva $y^2 = x^3$ entre $x = 0$ e $x = 4$, utilizando a regra de Simpson com 5 pontos. O resultado obtido é exacto? Porquê? Obtenha um majorante para o erro cometido.

Parte II (10 valores)

1. Mostre que uma matriz de diagonal estritamente dominante é invertível. (sugestão: utilize o teorema de Gershgorin)

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 - 2\cos b & \cos b \\ 1 & 25 & 5\sin a \\ 1 & 5\sin a + \sin b & 50 \end{bmatrix}$$

   (a) Localize gráficamente os valores próprios de A, usando o teorema de Gershgorin.

   (b) Faça $a = b = 0$ e realize duas iterações do método das potências para aproximar o valor próprio dominante.

   (c) Para que valores de a e b podemos obter uma decomposição $A = LL^T$, em que L é uma matriz triangular inferior ? Obtenha essa factorização no caso $a = b = 0$ e utilize-a para resolver o sistema $Ax = (10, 1, 1)^T$.

   (d) Justifique a convergência do método de Gauss-Seidel aplicado à resolução do sistema $Ax = (10, 1, 1)^T$ e realize três iterações do mesmo, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(t) = 2y'(t) - 2y(t) + e^{2t}\sin t, & t \in [0, 1] \\ y(0) = -0.4, \quad y'(0) = -0.6 \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Escreva o problema como um sistema de equações diferenciais de 1^a ordem.

   (b) Escreva o algoritmo que permite aproximar a solução do problema (1) usando o método de Euler progressivo. Indique também como aplicaria o método de Euler regressivo, escrevendo igualmente o algoritmo a usar na resolução das equações não lineares que surgem em cada passo de tempo.

   (c) Calcule aproximações de $y(0.2)$ e $y'(0.4)$ usando o método de Euler progressivo e o método de Runge-Kutta de ordem 2.