INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

Análise Numérica

Época de Recurso 29 de Junho de 2009

Parte I (10 valores)

1. Considere o polinómio de Legendre de terceira ordem $P(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

   (a) Pretende-se calcular uma aproximação de α, a única raíz positiva de $P(x)$. Mostre que α é ponto fixo de $g_1(x) = \frac{5}{3}x^3$ e de $g_2(x) = \sqrt[3]{0.6x}$. Diga, justificando, qual das funções usaria para aplicação do método do ponto fixo.

   (b) Diga, justificando, quantas iterações são necessárias para garantir 4 algarismos significativos no resultado. Sabendo agora que a partir de x_0 se obtiveram os valores $x_1 = 0.843433$ e $x_2 = 0.796894$, indique qual foi o valor escolhido para x_0 e calcule x_4.

   (c) Seja β única raíz negativa de $P(x)$. Justifique que o método iterativo

   $$x_{n+1} = \frac{10x_n^3}{15x_n^2 - 3}$$

   converge quadraticamente para β, qualquer que seja $x_0 \in [-1, -0.7]$. Calcule 3 iterações e indique um majorante para o erro cometido.

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^5(-2, 2)$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	6	2	0	α	2

   (a) Construa o polinómio interpolador de f em todos os pontos da tabela e determine α de modo que o polinómio interpolador seja de grau ≤ 3. Sabendo agora que $f(0.5) = -1$, determine um minorante para $\max\limits_{x\in[-2,2]} |f^{(5)}(x)|$.

   (b) Usando apenas os pontos $x_i = -2, 0, 2$ determine a melhor aproximação de f, no sentido dos mínimos quadrados, por funções da forma $g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \sin x$.

   (c) Tomando $\alpha = -1$, determine uma aproximação de $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ usando o método de Romberg, com a maior precisão possível.

3. Pretende-se obter uma fórmula de integração do tipo $Q(f) = A_0 f(0) + A_1(f(x_1) + f(-x_1))$ para aproximar o valor do integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

   (a) Mostre que a fórmula pode ter grau 3, independentemente do ponto de quadratura x_1.

   (b) Determine x_1 de modo que a fórmula seja de grau 5.

Parte II (10 valores)

1. Considere o sistema linear

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -97 \\ 514 \\ -380 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   (a) Qual o método de factorização mais adequado à resolução deste sistema ? Porquê ? Determine essa factorização e indique como utilizaria a mesma para determinar a solução do sistema.

   (b) Sabendo que $\|A^{-1}\|_\infty = 22/35$ e que $A\boldsymbol{y} = [-90, 500, -380]^T$, determine um majorante para $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_\infty / \|\boldsymbol{x}\|_\infty$.

2. Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 = b_1 \\ \\ a_2 x_1 + x_2 = b_2 \end{cases},$$

obtenha condições suficientes para a convergência do método de Gauss-Seidel e mostre que sendo $m = a_1 a_2$ se tem

$$x - x^{(k+1)} = \frac{m}{1-m}(x^{(k+1)} - x^{(k)}).$$

3. Considere o problema de valor inicial $y'(x) = -2y^2(x), \quad 0 \leq x \leq 1,\ y(0) = 1$. Mostre que o problema tem uma e uma só solução $y \in C^1(0,1)$ e determine uma aproximação de $y(1)$ usando o método de Euler com $h = 1/2$. Sabendo que a solução exacta verifica $|y(x)| \leq 1, \forall x$, determine um majorante para o erro cometido no cálculo anterior.

4. Considere o método de Runge-Kutta de ordem 3:

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{4} V_1 + \tfrac{3h}{4} V_3 \\ &V_1 = f(x_n, y_n), \quad V_2 = f(x_n + \tfrac{1}{3}h, y_n + \tfrac{1}{3}hV_1) \\ &V_3 = f(x_n + \tfrac{2}{3}h, y_n + \tfrac{2}{3}hV_2). \end{aligned}$$

Mostre que este coincide com o método de Taylor de ordem 3 quando aplicado à resolução da equação diferencial $y' = x + y$. Usando a condição inicial $y(0) = 0$ e, considerando $h = 0.1$, calcule uma aproximação de $y(0.3)$ usando um dos métodos.