

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E À GESTÃO

Análise Numérica

1º Teste

24 de Abril de 2009

Parte I

1. Considere a equação $4 \sin x - e^x = 0$.

- (a) Mostre que a equação tem uma única raiz z no intervalo $[0, 1/2]$. Calcule uma aproximação de z realizando 3 iterações do método de Newton, a partir da aproximação inicial $x_0 = 0$.
- (b) Considere a sucessão definida recursivamente por

$$x_{n+1} = \arcsin\left(\frac{e^{x_n}}{4}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Mostre que (x_n) converge para z , qualquer que seja $x_0 \in [0, 1/2]$ e calcule uma aproximação de z com erro absoluto inferior a 10^{-2} .

- (c) Tomando $z = 0.370558096$, compare a qualidade das aproximações obtidas pelos dois métodos para igual número de iterações. Os resultados estão de acordo as estimativas teóricas do erro? Justifique.

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^3(\mathbb{R})$.

x_i	-1	0	1
f_i	1	e	1

- (a) Determine o polinómio de grau ≤ 2 que interpola f nos pontos da tabela.
- (b) Mostre que, se $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, o erro relativo cometido ao aproximar $f(x)$ por $p_2(x)$ é majorado por $|f^{(3)}(\xi)/6|$, $\xi \in (-1, 1)$.
- (c) Determine a função da forma $g(x) = a_0 + a_1e^x + a_2e^{x^2}$ que melhor aproxima os valores conhecidos da função f , no sentido dos mínimos quadrados.

- (d) Sabendo que $f(-1/2) = f(1/2) = e^{-3/4}$, determine uma aproximação do integral $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ usando o método de Romberg.

3. Pretende-se construir uma fórmula de quadratura para integrais do tipo $I(f) = \int_{-1}^1 f(x)\sqrt{|x|} dx$, que seja da forma

$$Q(f) = A_0f(-x_0) + A_1f(0) + A_2f(x_0), \quad x_0 \in (0, 1).$$

Determine as constantes A_0, A_1, A_2, x_0 de modo que a fórmula seja exacta para polinómios de grau o maior possível. Qual o grau da fórmula obtida?