Instituto superior de Economia e Gestão

Análise Numérica | Época Normal, 8/6/2010

Grupo I [10 val]

1. Considere a função de Cobb-Douglas, $Y = \alpha K^{\beta} L^{1-\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, onde Y representa a produção total, K o input de capital, L a força de trabalho e as constantes α, β dependem do nível tecnológico. Diga qual o impacto de um erro relativo de 1% em K e L na estimativa da produção total Y.

2. Considere a equação, $x^2 - \cos x = 0$.

(a) Mostre que a função iteradora $g(x) = \sqrt{\cos x}$ permite obter sucessões convergentes para z, a única raíz da equação no intervalo $[0, 1]$.

(b) Usando o método do ponto fixo, calcule uma aproximação de z com erro absoluto inferior a 10^{-1}. Quantas iterações deveria realizar de modo a garantir um erro absoluto inferior a 0.5×10^{-6} ?

(c) Mostre que o método do ponto fixo utilizado em (b) converge linearmente para z.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2\sin a & 1+\sin a \\ \sin a + \sin b & 17 & \sin b \\ 2 & 1 & 50 - c^2 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(a) Para que valores das contantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ o teorema de Gershgorin permite construir três círculos disjuntos contendo valores próprios de A ?

(b) Tomando $\sin a = \sin b = 0$ e $c = \sqrt{50}$, efectue uma iteração do método das potências para obter uma aproximação do valor próprio dominante, partindo do vector $u^{(0)} = (1, 1, 0)$. Qual o valor do erro cometido ?

(c) Nas mesmas condições da alínea anterior, suponha que se pretende resolver o sistema $Ax = (\sqrt{2}, 0, 0)$. Determine um majorante para o erro relativo da solução do sistema, se utilizarmos a aproximação $\sqrt{2} \approx 1.41$. (nota: $\|A^{-1}\|_\infty = 53/17$)

(d) Tomando $c = 0$, em que condições é que A admite uma factorização de Cholesky ? Obtenha a factorização de Cholesky de A e utilize-a para resolver o sistema linear $Ax = (2, 5, 8)$.

Cotação: 1.5 + (1.5 + 1.0 + 1.0) + (1.0 + 1.5 + 1.0 + 1.5)

Grupo II [10 val]

1. Mostre que as funções $\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x$ e $\phi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x$ formam uma base ortonormada do espaço linear $K = \{f \in C[0,2\pi] : f(x) = \alpha + \beta\sin x + \gamma\cos x, \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$. Dada a função $g(x) = x$, determine a sua melhor aproximação por funções de K, no sentido dos mínimos quadrados, i.e. determine $w(x)$ tal que

$$w(x) = \arg\min_{f\in K} \int_0^{2\pi} (g(x) - f(x))^2\, dx.$$

Nota: $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \pi;\quad \int_0^{2\pi} x\sin x\, dx = -2\pi;\quad \int_0^{2\pi} x\cos x\, dx = 0.$

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f(x)$.

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	1	0	1	28

(a) Determine o polinómio $p_3(x)$, de grau não superior a 3, que interpola f nos pontos da tabela. Sabendo que f é um polinómio mónico de grau 4, determine a expressão exacta de $f(x)$.

(b) Calcule uma aproximação de $I(f) = \int_0^3 f(x)\, dx$, utilizando o método dos trapézios composto. Quantas subdivisões do intervalo $[0,3]$ seriam necessárias para garantir um erro de quadratura inferior a 0.5×10^{-3}? (Se não resolveu a alínea anterior, assuma que $|f''(x)| \leq 72$.)

3. Pretende-se calcular o integral $I(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\, dx$, usando uma regra de quadratura do tipo $Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$. Determine os nós de integração x_0, x_1 e os pesos A_0, A_1, de modo que o grau da fórmula seja o maior possível. Qual o grau da fórmula obtida?

Nota: $I(x) = 2\pi$, $I(x^3) = 2\pi(\pi^2 - 6)$, $I(x^5) = 2\pi\left(120 - 20\pi^2 + \pi^4\right)$.

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y(1-y), & t \in]0,1] \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

(a) Sabendo que a solução exacta do problema verifica $1/2 \leq y(t) < 1, t \geq 0$, determine o valor do passo h a utilizar no método de Euler, de modo a garantir que o erro cometido ao estimar $y(1)$ seja inferior a 0.01.

(b) Calcule uma aproximação de $y(1)$ usando o método de Taylor de ordem 2, com $h = 1/3$. Sabendo que a solução exacta do problema é $y(t) = e^t/(1+e^t)$, determine o erro cometido. Compare com as conclusões da alínea (a) e comente.

Cotação: 2.0 + (1.5 + 1.5) + 2.0 + (1.5 + 1.5)