# Instituto superior de Economia e Gestão

Análise Numérica Época de Recurso, 29/6/2010

---

**Grupo I** [10 val]

**1.** Considere o sistema não linear $\left\{\begin{array}{r} x^2+y^2=1 \\ \\ 4x^2+y^2/4=1 \end{array}\right.$. Localize graficamente as soluções do sistema e, usando três iterações do método de Newton, calcule uma aproximação da solução pertencente ao primeiro quadrante. Sabendo que a solução exacta é $(x,y)=(1/\sqrt{5},1/(2\sqrt{5}))$, forneça uma estimativa do coeficiente assimptótico de convergência.

**2.** Considere um empréstimo de $L$ u.m. por um período de $n$ meses, com uma taxa de juro mensal constante $r>0$. O valor da prestação constante é dado por $k=rL/(1-(1+r)^{-n})$.

(a) Suponha que $L,n$ e $k$ são conhecidos e se pretende determinar a taxa de juro. Mostre que essa taxa é ponto fixo da função $g(x)=k(1-(1+x)^{-n})/L$.

(b) Considere $L=5000$, $k=350$ e $n=24$. Mostre que a função $g$ tem um único ponto fixo $z$ no intervalo $[0.04,0.06]$ e a sucessão definida por $r_{i+1}=g(r_i)$ converge para $z$ qualquer que seja a aproximação inicial $r_0\in[0.04,0.06]$.

(c) Nas condições da alínea anterior, diga quantas iterações do método do ponto fixo devem ser efectuadas de modo a obter uma aproximação da taxa de juro com um erro absoluto inferior $10^{-6}$. Sabendo que $r_{20}=0.0464661$, determine a referida aproximação.

**3.** Considere as matrizes $A$ e $A^{-1}$ definidas por

$$A=\left[\begin{array}{ccc} 1 & a & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{array}\right],\quad A^{-1}=\frac{1}{2-2a^2}\left[\begin{array}{ccc} 2-a^2 & -a & a^2 \\ -a & 1 & -a \\ a^2 & -a & 2-a^2 \end{array}\right].$$

(a) Obtenha a expressão de $cond_1(A)$ e estude o condicionamento da matriz quando $a\to 1$ e $a\to\infty$.

(b) Prove que, se $|a|<1$, o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax=b$, qualquer que seja o vector $b\in\mathbb{R}^n$ e qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$.

(c) Admita que $|a|=1/2$ e que $\|x-x^{(0)}\|_\infty<1$, onde $x$ é a solução do sistema linear em causa. Quantas iterações do método de Jacobi é necessário realizar para obter uma aproximação $x^{(k)}$ que verifique $\|x-x^{(k)}\|_\infty<0.5\times 10^{-3}$ ?

---

Cotação: 2.0 + (1.0 + 1.5 + 1.5 ) + (1.5 + 1.0 + 1.5)

## **Grupo II** [10 val]

**1.** Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^5(\mathbb{R})$.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 4 |

(a) Determine o polinómio $p_4(x)$, de grau não superior a 4, que interpola $f$ nos pontos da tabela. Sabendo que $|f^{(5)}(x)| < 10$, determine um majorante para o erro de interpolação.

(b) Usando o método dos mínimos quadrados, determine

$$Q = \min_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{4} \left(f(x_i) - \alpha - \beta x_i^2\right)^2 .$$

(c) Calcule uma aproximação de $I(f) = \displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$, utilizando o método de Romberg.

**2.** Pretende-se calcular o integral $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx$, usando uma regra de quadratura do tipo $Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$. Determine os nós de quadratura $x_0, x_1$ e os pesos $A_0, A_1$, de modo que o grau da fórmula seja o maior possível. Qual o grau da fórmula obtida?

**Nota:** $I(1) = \pi/2$, $I(x^2) = 2 - \pi/2$, $I(x^4) = \pi/2 - 4/3$.

**3.** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y/t + 1, & t > 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que o problema de valor inicial tem uma e uma só solução, definida em $[1, +\infty[$.

(a) Utilizando o método de Euler, calcule uma aproximação de $y(2)$ com erro absoluto inferior a 0.2. Justifique cuidadosamente o valor escolhido para o passo de tempo $h$.

(b) Calcule uma aproximação de $y(2)$ usando o método de Crank-Nicholson, com $h = 1/2$. Sabendo que a solução exacta do problema é $y(t) = t\ln t$, determine o erro cometido. Compare com as conclusões da alínea (b) e comente.

---

Cotação: (1.5 + 1.5 +1.5) + 1.5 + (1.0 + 1.5 + 1.5)