Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
Análise Numérica

Avaliação Contínua - Teste 1 22/04/2010

1. Considere a divisão de um polinómio $p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ por $(x - z)$, em que z é uma raíz de $p_3(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & & & \\ z & & za_3 & zb_2 & zb_1 \\ \hline & a_3 & b_2 & b_1 & b_0 \approx 0 \end{array}$$

Determine as expressões dos erros relativo e absoluto cometidos no cálculo dos coeficientes b_1, b_2, provocados pelos erros de z e dos coeficientes do polinómio. Quais as expressões correspondentes no caso de assumirmos que os coeficientes do polinómio não estão afectados de erro ?

2. Considere o sistema linear $Ax = b$, em que a matriz A é triangular superior e invertível.

(a) Mostre que o método de Jacobi converge para a solução exacta do sistema, num número finito de iterações, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. (sugestão: se uma matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ fôr triangular superior com a diagonal principal nula, tem-se $C^n = 0$).

(b) Ilustre a situação descrita na alínea anterior, usando o método de Jacobi para determinar a solução exacta do sistema

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + 3y + 2z = 1 \\ y + 2z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right. . \tag{1}$$

(c) Escrevendo o método de Jacobi na forma $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$, calcule a normas $\|G\|_1$ e $\|G\|_\infty$ para o sistema (1). Comente a compatibilidade deste resultado com as conclusões das alíneas anteriores.

3. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 + z^2 = -1 \\ 2xy + 2y^2 + z^2 + 3z = 3 \\ 2xz - yz = -2. \end{cases}$$

(a) Escreva para este sistema o algoritmo do método de Newton.

(b) Partindo de $x^{(0)} = (1/2, 1/2, 0)$, determine a aproximação $x^{(1)}$ dada pelo método de Newton, resolvendo o sistema linear envolvido nos cálculos através do método de Crout.

4. Considere a função $f(x) = 2x - \cos x$.

(a) Mostre que f tem uma e uma só raiz real, α, que pertence ao intervalo $]0, \pi/4[$.

(b) Mostre que o método iterativo

$$x_{k+1} = \frac{\cos x_k}{2}, \quad k = 0, 1, \cdots$$

converge linearmente (ordem de convergência 1) para α, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, \pi/4]$. Indique, justificando, se a convergência é monótona.

(c) Escolhendo $x_0 = \pi/8$, indique um majorante para o erro $|\alpha - x_{16}|$.