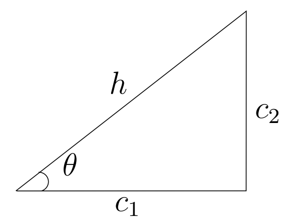
Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
Análise Numérica

Exame de Época Normal 16/06/2011

Parte I

1. Considere o problema de determinar a medida do cateto c_2 de um triângulo rectângulo por dois processos distintos (ver figura). O primeiro consiste em medir h e c_1, obtendo depois $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$. O segundo consiste em medir h e θ, e calcular $c_2 = h \sin\theta$. Ignorando os erros de arredondamento e assumindo que os erros relativos de medição de todas as grandezas são semelhantes, isto é, $\varepsilon_{c_1} \approx \varepsilon_h \approx \varepsilon_\theta$, qual dos dois métodos lhe parece mais adequado ?



2. Considere a equação $x^4 - \frac{1}{2}\cos x - 1 = 0$.

   (a) Mostre que a equação tem uma única solução z no intervalo $I = [0, 2]$ e que a sucessão definida recursivamente por $x_{n+1} = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{2}\cos x_n}$ converge para z, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in I$.

   (b) Mostre que a sucessão referida na alínea anterior converge linearmente, tomando valores alternadamente superiores e inferiores a z.

   (c) Considerando agora a aplicação do método de Newton à resolução do mesmo problema: i. indique um intervalo onde possa garantir a convergência do método, independentemente da condição inicial x_0; ii. calcule 3 iterações do método de Newton; iii. determine um majorante para o erro cometido.

3. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2\varepsilon^2 x_3^2 & = & 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 1 \end{cases}$$

   (a) Considere $\varepsilon = 0$. Mostre que o método de Jacobi é convergente no caso deste sistema linear e calcule 3 iterações do mesmo. Sem resolver o sistema, forneça um majorante para o erro cometido e indique o número de iterações a calcular de modo que o erro, medido numa norma à sua escolha, seja inferior a 0.5×10^{-6}.

   (b) Considerando agora $\varepsilon^2 < 1/4$, mostre que o sistema tem uma e uma só solução $z \in [-1, 1]^3$ e descreva um algoritmo que poderia utilizar para aproximar z.

Cotações: 1.5 + (2.0 + 1.0 + 2.0) + (1.5 + 2.0)

Parte II

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^5(\mathbb{R})$.

x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
f_i	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$

   (a) Determine o polinómio de grau ≤ 3 que interpola f nos primeiros quatro pontos da tabela e forneça uma estimativa para $f(3\pi/4)$.

   (b) Sabendo que $|f(x)| < 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e que f verifica a equação diferencial $f' + f = \sin x$, determine um majorante para o erro cometido na alínea anterior.

   (c) Determine o polinómio de grau ≤ 1 que melhor aproxima f no intervalo $[0, 2\pi]$, no sentido dos mínimos quadrados.

   (d) Utilizando o método de Romberg com todos os pontos da tabela, determine um valor aproximado de $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

2. Considere os $n+1$ pontos distintos $x_0, \cdots, x_n$ e os respectivos polinómios de Lagrange $L_i(x)$. Mostre que se tem $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$.

3. Dado $M > 0$, pretende-se calcular o integral $I(f) = \int_{-M}^{M} f(x)\,dx$, utilizando uma fórmula de quadratura do tipo $Q(f) = A\,f(-x_0) + B\,f(0) + A\,f(x_0)$.

   (a) Verifique que $Q(x^{2n+1}) = I(x^{2n+1})$. O que se pode concluir quanto ao grau da fórmula?

   (b) Determine A, B e x_0 de modo a que o grau da fórmula seja o maior possível e determine-o.

4. Seja a equação diferencial $y'(t) + 2y(t)\sin t = 0, \quad y(0) = 1$.

   (a) Usando o método de Euler com passo $h = 0.25$, determine uma aproximação de $y(1.0)$.

   (b) Admitindo que $|y''(x)| \leq 2$, determine o valor de h a utilizar de modo ao erro no cálculo de $y(1.0)$ ser inferior a 0.5×10^{-6}.

   (c) Mostre que a aplicação do método de Crank-Nicholson a esta equação conduz ao esquema numérico

$$y_{i+1} = \frac{1 - h\sin x_i}{1 + h\sin x_{i+1}} \cdot y_i$$

   e aproveite este facto para mostrar que, para a condição inicial $y(0) = 0$, o método fornece a solução exacta, qualquer que seja o passo $h < 1$.

Cotações: (1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0) + 1.0 + (1.0 + 1.0) + (1.0 + 1.0 + 1.0)

Tópicos de Resolução

1. Conforme indicado no enunciado consideremos $\varepsilon_{c_1} \approx \varepsilon_h \approx \varepsilon_\theta := \varepsilon$. Usando o primeiro processo temos

$$\varepsilon_{c_2} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - c_1^2}} \cdot \frac{2h}{2\sqrt{h^2 - c_1^2}} \cdot \varepsilon_h + \frac{c_1}{\sqrt{h^2 - c_1^2}} \cdot \frac{-2c_1}{2\sqrt{h^2 - c_1^2}} \cdot \varepsilon_{c_1} \approx \varepsilon$$

enquanto que usando o segundo processo temos

$$\varepsilon_{c_2} = \frac{h}{h \sin\theta} \cdot \sin\theta \cdot \varepsilon_h + \frac{\theta}{h \sin\theta} \cdot h\cos\theta \cdot \varepsilon_\theta \approx \left(1 + \frac{\theta\cos\theta}{\sin\theta}\right) \cdot \varepsilon.$$

Assim, como para $\theta \in]0, \pi/2[$ se tem $1 < 1 + \theta\cos\theta/\sin\theta < 2$, vemos que o primeiro processo é em geral preferível, embora para valores elevados de θ eles sejam equivalentes.

2. (a) Começemos por observar que $x^4 - \frac{1}{2}\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{2}\cos x}$, pelo que as soluções da equação dada são exactamente os pontos fixos de $g(x) = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{2}\cos x}$. Verifiquemos então se g satisfaz as condições do teorema do ponto fixo de Banach no intervalo indicado:

   i. g é contínua em I. $\surd$

   ii. $g(I) \subseteq I$
   Como a derivada $g'(x) = -\sin x \left(1 + \frac{1}{2}\cos x\right)^{-3/4}/8$ é sempre negativa em I (apenas se anulando em $x = 0$), concluímos que g é decrescente e que portanto $g([0,2]) = [g(2), g(0)] \approx [0.943346, 1.10668] \subseteq [0,2]$.

   iii. g é contractiva em I
   Como g é diferenciável neste intervalo, apenas temos que verificar que a sua derivada é, em módulo, inferior a 1. De facto, atendendo à expressão de $|g'|$, ela pode ser facilmente majorada por $(1 + \cos(2)/2)^{-3/4}/8 \approx 0.148901$.

   Verificadas estas três condições, o teorema do ponto fixo garante a existência e unicidade de um ponto fixo z de g em I e portanto a existência de uma e uma só raíz da equação no mesmo intervalo. Além disso, sabemos que a sucessão definidada recursivamente por $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para z, qualquer que seja $x_0 \in I$, o que prova o resultado pretendido.

   (b) A convergência do método do ponto fixo poderá ser supralinear se $g'(z) = 0$. Neste caso

$$g'(z) = -\frac{\sin z}{8}\left(1 + \frac{1}{2}\cos z\right)^{-3/4} = -\frac{\sin z}{8z^3}$$

   Ora, $g'(z)$ só poderia ser zero se $z = 0$, sendo que certamente não é esta a solução da equação. Assim $g'(z) \neq 0$ e portanto a convergência é apenas linear. Além disso, como $g' < 0$ em I, a convergência é alternada.

(c) Observemos em primeiro lugar que o intervalo $I = [0, 2]$ não é o mais adequado, uma vez que nesse intervalo não são verificadas as condições suficientes de convergência do método de Newton. De facto, como $f'(0) = 0$, devemos avançar um pouco o extremo inferior do intervalo. Consideremos então o intervalo $J = [1, 2]$ e verifiquemos as condições:

- $f \in C^2(J) \quad \surd$.
- $f(1) \cdot f(2) = -4.10848 < 0$.
- $f'(x) > 0$ em J
- $f''(x) \geq 0$ em J.
- $|f(1)/f'(1)| = 0.06111 < |2 - 1|$, $|f(2)/f'(2)| = 0.468595 < |2 - 1|$

Assim, podemos garantir que o método de Newton converge pelo menos quadraticamente para a raíz de f em $[1, 2]$, qualquer que seja a aproximação inicial tomada nesse intervalo. A iteração do método é dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - \frac{1}{2}\cos x_n - 1}{4x_n^3 + \frac{1}{2}\sin x_n}.$$

Começando por exemplo com $x_0 = 1$, temos

$$x_1 = 1.06111, \quad x_2 = 1.05654, \quad x_3 = 1.05651$$

Como $f(x_0)f(x_1) < 0$ sabemos que a raíz pertence ao intervalo $[x_0, x_1]$, pelo que $|e_0| \leq 0.06111$. Por outro lado,

$$M = \frac{\max_J |f''(x)|}{2\min_J |f'(x)|} = \frac{|f''(2)|}{2|f'(1)|} = 5.40543.$$

Usando a estimativa de erro a priori, $M|e_n| \leq (M|e_0|)^{2^n}$ concluímos que $|e_3| \leq 2.62256 \times 10^{-5}$.

3. (a) A matriz do sistema proposto é de diagonal estritamente dominante, pelo que o sistema tem uma e uma só solução e o método de Jacobi converge para essa solução, independentemente da aproximação inicial escolhida. Tomando o vector nulo para aproximação inicial temos:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ -9/32 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Podemos obter um majorante do erro usando a estimativa de erro a posteriori

$$\|z - x^{(n)}\| \leq \frac{\|G\|^n}{1 - \|G\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Tendo em conta que $G = D^{-1}(L + U)$, obtemos $\|G\| = 3/4$, pelo que $\|z - x^{(3)}\| \leq 0.486842$. Para o erro ser inferior ao limite especificado deveríamos calcular 53 iterações.

(b) O sistema pode ser escrito na forma equivalente

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \varepsilon^2 x_3^2 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{x})$$

Deste modo as soluções do sistema inicial são exactamente os pontos fixos de G. Verifiquemos então as condições do terorema do ponto fixo:

i. G é contínua em $\Omega = [-1, 1]^3$

ii. $G(\Omega) \subseteq \Omega$. Para $x_1, x_2, x_3 \in [-1, 1]$ e $\varepsilon^2 \leq \frac{1}{2}$ temos

$$-1 \leq -\frac{1}{2} - \varepsilon^2 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \varepsilon^2 x_3^2 \leq 1$$

$$-1 \leq -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_3 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \leq 1$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 1$$

Pelo que de facto $G(\Omega) \subseteq \Omega$

iii. G é contractiva em Ω. Como G é diferenciável, basta verificar que $\|J_G(\boldsymbol{x})\| < 1$, nalguma norma.

$$J_G(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -2\varepsilon^2 x_3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|J_g(\boldsymbol{x})\|_\infty \leq \max\{1/2 + 2\varepsilon^2, 3/4, 3/4\}$$

Ora, como $\varepsilon^2 < 1/4$, $1/2 + 2\varepsilon^2 < 1$ e, portanto, a norma infinito da matriz jacobiana é inferior a 1.

Concluímos por isso que, estando verificadas as condições do teorema do ponto fixo de Banach, G tem um e um só ponto fixo em Ω e consequentemente o sistema tem uma e uma só solução no mesmo conjunto. A solução do sistema pode ser aproximada tomando $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \Omega$ e iterando de acordo com a fórmula $\boldsymbol{x}^{(n+1)} = G(\boldsymbol{x}^{(n)})$.

Parte II

1. (a)

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	$-1/2$			
		$2/\pi$		
$\pi/2$	$1/2$		$-2/\pi^2$	
		0		0
$\pi/2$	$1/2$		$-2/\pi^2$	
		$-2/\pi$		
$3\pi/2$	$-1/2$			

$$p_3(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{2})$$

$$f(3\pi/4) \approx p_3(3\pi/4) = \frac{5}{8}$$

(b)

$$f(3\pi/4)-p_3(3\pi/4)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(3\pi/4-0)(3\pi/4-\pi/2)(3\pi/4-\pi)(3\pi/4-3\pi/2)=\frac{3\pi^4}{2048}f^{(4)}(\xi)$$

$f'(x)=\sin x-f(x)$
$f''(x)=\cos x-f'(x)=\cos x-\sin x+f(x)$
$f'''(x)=-\sin x-\cos x+f'(x)=-\cos x-f(x)$
$f^{(4)}(x)=\sin x-f'(x)=\sin x-\sin x+f(x)=f(x)$
Deste modo temos que $|f(3\pi/4)-p_3(3\pi/4)|\leq\dfrac{3\pi^4}{2048}|f^(\xi)|\leq\dfrac{3\pi^4}{2048}\approx 0.1426894.$

(c) Considerando a base canónica do espaço dos polinómios de grau 2, $g_0(x)=1, g_1(x)=x$, o sistema normal que permite calcular os coeficientes pretendidos é:

$$\begin{bmatrix}5 & \sum x_i\\ \sum x_i & \sum x_i^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum f_i\\ \sum f_i x_i\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}5 & 5\pi\\ 5\pi & \frac{15\pi^2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2\\ -\pi\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/10\\ -1/(5\pi)\end{bmatrix}$$

Deste modo, o polinómio pretendido é $p(x)=\frac{1}{10}-\frac{1}{5\pi}x$.

(d)

$$\begin{array}{ccc} T_{0,0} & & \\ & T_{1,1} & \\ T_{1,0} & & T_{2,2}\\ & T_{2,1} & \\ T_{2,2} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned}
T_{0,0}&=\tfrac{2\pi}{2}(-1/2-1/2)=-\pi\\
T_{1,0}&=\tfrac{\pi}{2}(-1/2+2\cdot 1/2-1/2)=0\\
T_{2,0}&=\tfrac{\pi/2}{2}(-1/2+2\cdot 1/2+2\cdot 1/2+2\cdot(-1/2)-1/2)=0\\
T_{1,1}&=T_{1,0}+(T_{1,0}-T_{0,0})/(4^1-1)=\pi/3\\
T_{2,1}&=T_{2,0}+(T_{2,0}-T_{1,0})/(4^1-1)=0\\
T_{2,2}&=T_{2,1}+(T_{2,1}-T_{1,1})/(4^2-1)=-\pi/45
\end{aligned}$$

Uma possível estimativa para o integral é dada por $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\approx T_{2,2}=-\pi/45$.

2. Usando a fórmula interpoladora de Lagrange, $\sum L_i(x)=\sum 1\cdot L_i(x)$ é um polinómio de grau n que toma o valor 1 nos pontos $x_0,\cdots x_n$. Por unicidade do polinómio interpolador, esta soma deve ser a função constante igual a 1, como queríamos demonstrar.

3. (a) $I(x^{2n+1})=\int_{-M}^{M}x^{2n+1}\,dx=0$
$Q(x^{2n+1})=A(-x_0)^{2n+1}+B\cdot 0^{2n+1}+Ax_0^{2n+1}=0$
Assim, de facto, temos $Q(x^{2n+1})=I(x^{2n+1})$. Podemos daqui concluir que a fórmula terá grau ímpar.

(b) Começamos por observar que, face ao resultado da alínea anterior, o cálculo dos parâmetros deve ser feito exigindo que a fórmula seja exacta para polinómios de grau par, já que os de grau ímpar fornecem equações redundantes.

$$\begin{cases} Q(1) = I(1) \\ Q(x^2) = I(x^2) \\ Q(x^4) = I(x^4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + A = 2M \\ A(-x_0)^2 + B\cdot 0 + Ax_0^2 = 2M^3/3 \\ A(-x_0)^4 + B\cdot 0 + Ax_0^4 = 2M^5/5 \end{cases} \overset{A\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} A + B + A = 2M \\ x_0^2 = \frac{M^3}{3A} \\ A\left(\frac{M^3}{3A}\right)^2 + A\left(\frac{M^3}{3A}\right)^2 = \frac{2M^5}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{8M}{9} \\ x_0 = \pm M\sqrt{\frac{3}{5}} \\ A = \frac{5M}{9} \end{cases}$$

A fórmula obtida tem pelo menos grau 4 mas por (a) terá pelo menos grau 5. Como além disso $Q(x^6) = 6M^7/25 \neq 2M^7/7$, vemos que o grau da fórmula é exactamente 5.

4. (a) $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i - h2y_i \sin x_i = (1 - 2h \sin x_i)y_i$

   Assim, considerando $h = 0.25$, teremos $y(1) \approx y_4$

   $y_1 = (1 - 2\cdot 0.25 \sin 0)y_0 = 1$

   $y_2 = (1 - 2\cdot 0.25 \sin 0.25)y_1 = 0.876298$

   $y_3 = (1 - 2\cdot 0.25 \sin 0.5)y_2 = 0.666238$

   $y_4 = (1 - 2\cdot 0.25 \sin 0.75)y_3 = 0.439171$

   (b) Estando nas condições de aplicação do teorema de existência e unicidade de solução do problema de valor inicial apresentado, podemos usar a fórmula do erro global para o método de Euler

$$|y(1.0) - y_n| \leq \frac{Mh}{2L}\left(e^{L(1-0)} - 1\right)$$

   em que,

$$L = \max_{(t,y)}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max_{(t,y)}|2\sin t| \leq 2\sin 1$$

$$M = \max_t |y''(t)| \leq 2$$

   Podemos então determinar h resolvendo a inequação

$$\frac{2\sin 1h}{4}(e^2 - 1) \leq 0.5\times 10^{-6} \Leftrightarrow h \leq 0.37201\times 10^{-6}$$

   (c)

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \\ &= y_i + \frac{h}{2}(-2y_i \sin x_i - 2y_{i+1}\sin x_{i+1}) \\ &= y_i - hy_i \sin x_i - hy_{i+1}\sin x_{i+1} \\ &= (1 - h\sin x_i)y_i - h\sin x_{i+1}y_{i+1} \end{aligned}$$

podemos então escrever,

$$y_{i+1} = (1 - h\sin x_i)y_i - h\sin x_{i+1}y_{i+1} \Leftrightarrow y_{i+1} = \frac{(1 - h\sin x_i)}{1 + h\sin x_{i+1}}$$

como queriamos demonstrar. Relativamente à segunda parte da questão, se $y_0 = 0$, todos os y_i serão também zero, desde que o coeficiente $(1 - h\sin x_i)/(1 + h\sin x_i)$ possa ser calculado, o que é garantido quando $h < 1$. Tendo em conta que neste último caso a solução exacta é a solução nula, o método efectivamente é exacto.