Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
ANÁLISE NUMÉRICA

Exame em Época de Recurso 01/07/2011

Parte I

1. Considere o cálculo de valores da função $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$, através do algoritmo:

$$\begin{aligned} z_1 &= x^2 - 1 \\ z_2 &= \sqrt{z_1} \\ z_3 &= x - z_2 \end{aligned}$$

   Mostre que este algoritmo é numericamente instável para $x \gg 1$ e reformule-o de modo a obter um algoritmo estável.

2. Considere a função $f(x) = e^{2x} - 4x^4$.

   (a) Mostre que todas as soluções positivas da equação $f(x) = 0$ são também pontos fixos das funções $g_1(x) = 2\log(\sqrt{2}x)$ e $g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{x/2}$

   (b) Mostre que g_2 tem um único ponto fixo z no intervalo $I = [0, 2]$ e que a sucessão definida por $x_{n+1} = g_2(x_n),\ x_0 \in I$ converge linearmente para z. Calcule 10 iteradas e estime quantas iterações adicionais seriam necessárias de modo a que o erro fosse inferior a 0.5×10^{-9}.

   (c) Mostre que a sucessão $x_{n+1} = g_1(x_n),\ x_0 \in I$, não converge para z.

3. Mostre que se $\lambda \in \mathbb{R}$ for valor próprio de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então qualquer norma matricial de A verifica $\|A\| \geq |\lambda|$.

4. Considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que o método de Jacobi é convergente no caso deste sistema e calcule 3 iterações. Sem resolver o sistema, forneça um majorante para o erro cometido e indique um número de iterações para o qual possa garantir que o erro, medido numa norma à sua escolha, seja inferior a 0.5×10^{-6}.

   (b) Mostre que a matriz de sistema admite uma factorização de Cholesky e determine-a.

Cotações: 1.5 + (1.0 + 2.0 + 1.0) + 1.0 + (2.0 + 1.5)

Parte II

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

x_i	0	2	3	4	5	6
f_i	1	0	-1	2	0	-2

   (a) Determine um polinómio $p(x)$, de grau o menor possível, que interpole f nos primeiros 3 pontos da tabela.

   (b) Pretende-se aproximar $f(1)$ usando o polinómio interpolador referido na alínea anterior. Supondo que as derivadas de f verificam a desigualdade $|f^{(j)}(x)| \leq (3/2)^j$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $j \geq 1$, obtenha um majorante para o erro de interpolação $|f(1) - p(1)|$.

   (c) Pretende-se aproximar f, no intervalo $[0, 4]$, por uma função do tipo $g(x) = a_0 x + a_1(x-3)^2$. Determine os valores de a_0 a a_1 correspondentes à melhor aproximação, no sentido dos mínimos quadrados.

   (d) Aproxime o integral $\int_0^6 f(x)\,dx$ pela regra dos trapézios composta, com 3 subintervalos. Supondo que as derivadas de f verificam a condição referida na alínea b), apresente um majorante para o erro de integração.

2. Pretende-se aproximar o integral $I(f) = \int_1^3 x^2 f(x)\,dx$ utilizando uma fórmula de quadratura do tipo $Q(f) = Af(1) + Bf(3)$. Determine os pesos de quadratura A, B de modo a que a fórmula seja exacta para polinómios de grau ≤ 1 e indique o correspondente grau de precisão.

3. Seja a equação diferencial $y' = e^{-t} \cos^2 y, \quad y(1) = 1$.

   (a) Assumindo que a equação tem uma e uma só solução $y \in C^\infty(]1, +\infty[)$, mostre que esta é estritamente crescente.

   (b) Usando o método de Euler com passo $h = 0.1$, determine uma aproximação de $y(1.4)$.

   (c) Determine o valor do passo de tempo h que deve ser utilizado na aplicação do método de Euler, de modo que o erro no cálculo de $y(1.4)$ seja inferior a 0.5×10^{-4}.

Cotações: (1.5 + 1.0 + 1.5 + 1.0) + 1.5 + (1.0 + 1.0 + 1.5)