

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

ANÁLISE NUMÉRICA

Avaliação Contínua - Teste 1

04/04/2011

1. Considere a função $f(x) = (1 - x)e^{\frac{1}{1-x}}$, $x > 1$. Com o objectivo de calcular valores da função f construiu-se um algoritmo baseado nos seguintes passos:

$$z_1 = 1 - x, \quad z_2 = 1/z_1, \quad z_3 = e^{z_2}, \quad z_4 = z_3 z_1.$$

Estude o algoritmo proposto quanto ao condicionamento e estabilidade.

2. Considere a equação não linear $xe^x - 3 = 0$.
- (a) Mostre que a equação tem uma única raiz no intervalo $I = [1, 1 + \frac{1}{10}]$ e que, escolhendo de forma conveniente $x_0 \in I$, o método de Newton converge para a solução da equação.
- (b) Calcule 3 iterações do método de Newton e forneça uma estimativa do erro cometido. Quantas iterações precisaria calcular para obter uma solução com 15 algarismos significativos ?
3. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} 10x + xy = 1 \\ 20y - \cos(x + y) = -1 \end{cases}$$

- (a) Mostre que, para $\alpha > 0$ escolhido de forma conveniente, o sistema tem uma única solução no conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_\infty < \alpha\}.$$

- (b) Calcule três iterações do método do ponto fixo e, com base nas diversas majorações de erro disponíveis, forneça a melhor estimativa para o número de iterações necessárias para atingir uma precisão de 8 algarismos significativos.

4. Considere o sistema linear $A\mathbf{x} = b$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Sabendo que $\|A^{-1}\|_1 = 5/14$, estime o erro cometido na solução do sistema se o segundo membro utilizado for $\tilde{b} = (0.0001, 1, 0.0001)^T$.
- (b) Mostre que o método de Jacobi é convergente, qualquer que seja $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$. Calcule três iterações do método de Jacobi e indique quantas mais iterações deveriam ser realizadas de modo a garantir que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)}\|_1 \leq 0.5 \times 10^{-8}$.
- (c) Mostre que a matriz A admite uma fatorização de Cholesky e utilize essa fatorização para resolver o sistema.