INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E GESTÃO

Análise Numérica

Exame Final 22 de Julho de 2002

I

1. Mostre que uma matriz com um ou mais elementos negativos na diagonal principal não pode ser definida positiva (sugestão: escolha um vector x de tal modo que $x^T A\, x = a_{ii}$).

2. Considere a seguinte matriz tridiagonal de dimensão $(n \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \delta_2 & & & \\ \delta_1 & \varepsilon & \delta_2 & & \\ & \delta_1 & \varepsilon & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \delta_2 \\ & & & \delta_1 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

(a) Assumindo que $\varepsilon > 0$ e $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, apresente um algoritmo que construa a factorização LU da matriz A, com o menor número possível de operações.

(b) No caso $n = 3$, em que condições a matriz A admitirá uma factorização de Cholesky? Determine essa factorização e use-a na resolução do sistema linear $A\, x = (1, 0, 0)$.

II

1. Considere a equação

$$x - e^{-x/2} = 0 \tag{1}$$

e a sucessão definida por

$$x_0 = 0.6, \quad x_{n+1} = \frac{3}{4}\, x_n - \frac{\log x_n}{2}, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

(a) Recorrendo ao teorema do ponto fixo, mostre que a sucessão (2) é convergente para um número real $z \in [0.6, 0.8]$. Prove também que z é a única raiz da equação (1) nesse intervalo.

(b) Para obter uma aproximação de z, efectue iterações do método (2) até que seja verificada a condição $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-4}$. Obtenha também um majorante para o erro absoluto cometido ao aproximar z pela última iterada considerada.

(c) Prove que o método de Newton, aplicado à equação (1), converge para a raiz $z \in [0.6, 0.8]$, qualquer que seja a aproximação inicial pertencente a esse intervalo.

2. Seja g uma função continuamente diferenciável num intervalo $I = [a, b]$, com $0 < g'(x) < 1$ para $x \in I$, e tal que g tem um ponto fixo $w \in I$. Mostre que nessas condições $g(I) \subset I$.

III

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	0	1	2	3	4	7	9	10	13	16
$f(x_i)$	12	10	7	5	6	8	11	14	15	20

(a) Calcule aproximações de $\int_1^{13} f(x)\,dx$ utilizando: i) a regra de Simpson simples; ii) a regra de Simpson composta.

(b) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, obtenha o polinómio de grau 2 que interpola f nos pontos da tabela correspondentes aos nós 3,4,7.

(c) Supondo que a restrição de f ao intervalo $[3, 7]$ é um polinómio mónico de grau 3 , determine um majorante para o erro de interpolação cometido na alínea anterior.

2. Para aproximar o integral $I(f) = \int_0^4 x\,f(x)\,dx$ construa uma fórmula de quadratura da forma $Q(f) = A_0 f(0) + A_1 f(3)$. Determine as constantes A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja exacta quando f é um polinómio de grau ≤ 1. Qual o grau de precisão da fórmula ?

3. Considere a equação diferencial

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}, \quad x \in [1, 2],$$

com a condição inicial $y(1) = 2$.

Usando o método de Euler com passo $h = 0.1$, obtenha um valor aproximado de $y(1.2)$.