Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
Análise Numérica

Exame em época Normal 08/06/2012

Parte I

1. Considere o cálculo da expressão $f = x^2 y$. Supondo que dispomos apenas de aproximações $(\tilde{x}, \tilde{y})$ de (x, y) tais que $\tilde{x}, x \in [1.9; 2.1]$ e $\tilde{y}$ está afectado de um erro inferior a 3%, forneça um majorante para o erro relativo cometido no cálculo de f.

2. A equação $x^2 - 10 \cos x = 0$ possui uma única raíz positiva, $z < 2$.

   (a) Usando o método do ponto fixo com uma função iteradora conveniente, construa uma sucessão (x_n) convergente para z e indique a respectiva ordem de convergência.

   (b) Efectue três iterações do método definido na alínea anterior, determine um majorante para o erro cometido e indique quantas mais iterações deveriam ser calculadas de modo a obter uma aproximação com 6 algarismos dignificativos.

3. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} 2\varepsilon xy + 2x + y = 1 \\ x + 3y + \varepsilon e^{x+y} = 0 \end{cases}, \quad \varepsilon \geq 0.$$

   (a) Faça $\varepsilon = 1$ e indique qual o sistema linear que deveria resolver para, a partir da aproximação inicial $x^{(0)} = (0, 0)$, calcular a primeira iteração do método de Newton.

   (b) Faça $\varepsilon = 0$ e considere a matriz A, do sistema linear assim obtido. Justifique a convergência do método de Jacobi aplicado a este sistema, calcule 3 iterações do mesmo e indique quantas iterações deveriam ser calculadas de modo ao erro, medido numa norma conveniente, ser inferior a 0.5×10^{-6}.

   (c) Ainda para $\varepsilon = 0$, resolva o sistema linear usando uma factorização adequada da matriz de sistema.

Parte II

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$f(x_i)$	0	-1	-4	9	-16	-25	-36

   (a) Determine o polinómio $p(x)$ de grau ≤ 3 que interpola f nos primeiros 4 pontos da tabela e, sabendo que para $n \geq 3$ se tem $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, determine um majorante para $|f(1.5) - p(1.5)|$.

   (b) Obtenha duas aproximações para o integral $I = \int_1^7 f(x)\,dx$ utilizando a regras dos trapézios composta com: **(i)** 2 subintervalos; **(ii)** 3 subintervalos.

   (c) Determine os valores das constantes a, b que minimizam a soma

$$\sum_{i=0}^{2} \Big(f(x_i) - a\sin(\frac{\pi}{2}x_i) - b \Big)^2 .$$

2. Obtenha a fórmula de Gauss com dois nós de integração para aproximar o integral $I(f) = \int_0^2 f(x)\,dx$. Determine o grau da fórmula, aplique-a no cálculo aproximado de $I(e^x)$ e , sem calcular o valor exacto do integral, apresente um majorante para o erro cometido.

3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \sin(xy), \quad x \in]0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

   (a) Mostre que o problema tem uma e uma só solução $y \in C^1(]0,1[)$ e utilize o método de Euler com passo $h = 0.1$ para obter uma aproximação de $y(0.4)$. Sabendo que $\max\limits_{x\in[0,1]} |y(x)| \leq 2$, apresente um majorante para o erro cometido.

   (b) Obtenha novas estimativas de $y(0.4)$ usando os método de Taylor de ordem 2, com passo $h > 0$ à sua escolha.