Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
ANÁLISE NUMÉRICA

Exame em época de recurso 26/06/2012

Parte I

1. Considere a equação não linear $f(x) = 0$, em que $f(x) = e^{-x} - x^2$.

   (a) Mostre que f tem uma e uma só raíz no intervalo $[0, 1]$.

   (b) Obtenha uma estimativa da raiz utilizando 3 iterações do método da bisseção. Determine o número total de iterações necessárias para aproximar a raiz com erro absoluto inferior a 10^{-10}.

   (c) Considere o método do ponto fixo com função iteradora $\phi(x) = x + \frac{1}{4}(e^{-x} - x^2)$. Mostre que o método converge para a raiz de f, qualquer que seja $x_0 \in [0, 1]$.

   (d) Calcule 3 iterações do método do ponto fixo mencionado na alínea anterior e estime quantas mais iterações deveriam ser calculadas de modo a que a solução aproximada tenha 10 algarismos significativos.

2. Considere a aplicação do método de Newton a uma equação $f(x) = 0$. Mostre que se obtivermos duas iteradas consecutivas com o mesmo valor, digamos c, então c é uma raiz de f.

3. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x_1^3 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ e^{x_2} - x_3^2 = 1 \\ -x_1^2 + x_2 + x_3 = \alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (a) Mostre que o sistema linear a resolver para obter a primeira iterada do método de Newton, a partir de $\boldsymbol{x}^{(0)} = (c, 0, 0)^T$, é da forma $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -c^3 \\ 0 \\ c^2 + \alpha \end{pmatrix}.$$

   (b) Para que valores de c pode garantir a convergência do método de Jacobi, aplicado ao sistema linear definido na alínea anterior ?

   (c) Considere $c = 1$ e suponha que apenas dispomos de uma aproximação $\tilde{\alpha}$ de α que verifica $|\alpha - \tilde{\alpha}| < 0.001$, obtendo assim uma solução $\tilde{\boldsymbol{v}}$ para o sistema linear. Sabendo que $\|A^{-1}\|_\infty = 18$, determine um majorante do erro relativo cometido ao aproximar $\boldsymbol{v}$ por $\tilde{\boldsymbol{v}}$.

Parte II

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f.

x_i	0	1	2	3	4	7	9	10	13	16
$f(x_i)$	12	10	7	5	6	8	11	14	15	20

   (a) Calcule aproximações de $\int_1^{13} f(x)\,dx$ usando a fórmula dos trapézios e a fórmula de Simpson compostas.

   (b) Aproxime o mesmo integral usando o método de Romberg.

   (c) Determine o polinómio de menor grau possível que interpola f nos primeiros 4 pontos da tabela, utilize-o para estimar $f(3/2)$ e, supondo que $|f^{(4)}(x)| < 3, \quad 0 < x < 3$, apresente um majorante para o erro cometido.

   (d) Determine a função da forma $g(x) = ax^2 + bx$ que melhor se ajusta aos primeiros 3 pontos da tabela, no sentido dos mínimos quadrados.

2. Sejam $x_0, x_1, \cdots x_n$ pontos distintos e sejam $L_k(x), k = 0, \cdots, n$ os polinómios de Lagrange associados. Mostre que para $n \geq 1$ se tem

$$\sum_{k=0}^{n} x_k L_k(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Suponha que pretende aproximar o integral $I(f) = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ usando uma fórmula de quadratura do tipo $Q(f) = A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2)$. Determine os coeficientes A_0, A_1, A_2 de modo que a fórmula tenha pelo menos grau 2 e utilize-a para aproximar $\int_{-1}^{3} xe^x$.

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} e^t y'(t) = \cos(ty(t)), \quad t \in]0,1] \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

   (a) Mostre que o problema tem uma e uma só solução $y \in C^\infty(]0,1[)$.

   (b) Determine um valor aproximado de $y(1)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.25$ e apresente uma estimativa do erro cometido (sugestão: poderá ser importante mostrar que $|y(t)| \leq 1$).

   (c) Determine uma aproximação de $y(1)$ usando o método de Runge-Kutta de ordem 4.